

FACHHOCHSCHULE FÜR TECHNIK ESSLINGEN

Wintersemester 2005 / 06	– Lösungen –
Fachbereiche: Informationstechnik (IT)	Studiengang: NT, SW, TI
Prüfungsfach: Numerische Methoden	Fachnummer: 4094
Hilfsmittel: 2 Seiten Manuskript	Zeit: 60 min

Aufgabe 1 (Newtonverfahren):

(Bearbeitungszeit ca. 15 min.)

- (a) Linearisierung: Ausgehend von der alten Näherung $(x_k|y_k)$ ergibt sich die neue Näherung $(x_{k+1}|y_{k+1})$ als Schnittpunkt der Tangentialebenen an die beiden Flächen $z_m = f_m(x, y)$ ($m = 1, 2$) in den Punkten $P_m(x_k|y_k|f_m(x_k, y_k))$ mit der $x - y$ -Ebene.

- (b) 1. Formel:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \mathbf{J}^{-1}(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2y \\ 2x & 2(y-1) \end{pmatrix}$$

ist

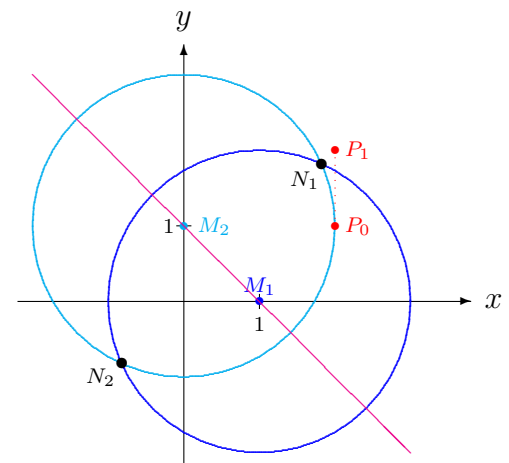
$$\mathbf{J}(2, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1}(2, 1) = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Veranschaulichung:

$f_1(x, y) = 0$ gilt genau auf einem **Kreis um $M_1(1|0)$ mit Radius 2**, entsprechend ist $f_2(x, y) = 0$ genau auf einem **Kreis um $M_2(0|1)$ mit Radius 2**. Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind gerade die Nullstellen der Funktion $\mathbf{f}$; ausgehend vom Startwert $P_0(2, 1)$ konvergiert das Newtonverfahren offensichtlich gegen die Nullstelle N_1 . Alle Startwerte, für die das Newtonverfahren bereits im ersten Schritt scheitert, liegen auf der **rosafarbenen** Geraden, vgl. Aufgabenteil (b₃).



3. Das Newtonverfahren scheitert im ersten Schritt, wenn $\det(\mathbf{J}(x_0, y_0)) = 0$ ist; denn dann ist die Jacobimatrix nicht invertierbar. Mit Aufgabenteil (b₁) ist

$$\det(\mathbf{J}(x, y)) = 4 \cdot ((x-1)(y-1) - xy) = 4 \cdot (1 - x - y);$$

damit scheitert das Newtonverfahren im ersten Schritt genau dann, wenn die Startwerte $(x_0|y_0)$ auf der Geraden $y_0 = 1 - x_0$ liegen.

Aufgabe 2 (Lineare Gleichungssysteme):

(Bearbeitungszeit ca. 10 min.)

- (a) Entscheidende Nachteile des Gauß'schen Eliminationsverfahrens gegenüber den angegebenen iterativen Verfahren sind
- Der Rechenaufwand ist *erheblich* höher;
 - man muß *ganz* durchrechnen, bevor man eine Lösung erhält;
 - Rundungsfehler können kumulieren und das Ergebnis unbrauchbar machen.
- (b) Ja, denn die Matrix ist strikt diagonaldominant. (Auf den Startvektor und die Inhomogenität kommt's dabei gar gar nicht an.)
- (c) Es ist

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \cdot (b_1 - 1 \cdot x_2^{(0)}) = 1; \\x_2^{(1)} &= \frac{1}{4} \cdot (b_2 - 1 \cdot x_1^{(1)} - 1 \cdot x_3^{(0)}) = -1; \\x_3^{(1)} &= \frac{1}{4} \cdot (b_3 - 1 \cdot x_2^{(1)} - 1 \cdot x_4^{(0)}) = 1; \\x_4^{(1)} &= \frac{1}{2} \cdot (b_4 - 1 \cdot x_3^{(1)}) = -2.\end{aligned}$$

Die neue Näherung lautet also $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}) = (1, -1, 1, -2)$.

Aufgabe 3 (Integration):

(Bearbeitungszeit ca. 15 min.)

- (a) Man interpoliert die gegebene Funktion durch ein Polynom und verwendet den Flächeninhalt „unter“ diesem Polynom als Näherungswert für den gesuchten Flächeninhalt. Zur Erhöhung der Genauigkeit kann man zusammengesetzte Quadraturformeln verwenden.
- (b) 1. Stützstellen und Stützwerte sind

k	0	1	2	3	4
x_k	-2	-1	0	+1	+2
y_k	1/5	1/2	1	1/2	1/5

Damit lautet die Simpsonformel

$$S = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{32}{15}.$$

2. Die Fehlerabschätzung für die Simpsonregel lautet

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S \right| \leq \frac{b-a}{180} \cdot \|f^{(4)}\|_{\infty} \cdot h^4;$$

hier ist $a = -2$, $b = +2$, $h = 1$ und (nach dem Hinweis) $\|f^{(4)}\|_{\infty} = 24$. Damit ergibt sich

$$\left| \int_{-2}^2 \frac{dx}{1+x^2} - S \right| \leq \frac{8}{15}.$$

Es ist also

$$\frac{32}{15} - \frac{8}{15} \leq \int_{-2}^2 \frac{dx}{1+x^2} \leq \frac{32}{15} + \frac{8}{15}, \quad \text{d.h.} \quad \frac{8}{5} \leq \int_{-2}^2 \frac{dx}{1+x^2} \leq \frac{8}{3}.$$

3. Die Fehlerabschätzung aus der Vorlesung lautet

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T \right| \leq \frac{b-a}{12} \cdot \|f''\|_\infty \cdot h^2;$$

mit $h = (b-a)/n$ (n = Anzahl Teilintervalle), $[a, b] = [-2, 2]$ und $\|f''\|_\infty = 2$ wird

$$\left| \int_{-2}^2 \frac{dx}{1+x^2} - T \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \|f''\|_\infty \leq \frac{32}{3n^2}.$$

Die Forderung, daß der Fehler kleiner sein soll als 0.1 ist also erfüllt, wenn man

$$\frac{32}{3n^2} < 0.1$$

wählt; daraus ergibt sich

$$n > \sqrt{\frac{32}{3 \cdot 0.1}} = \sqrt{\frac{320}{3}} \approx 10.$$

Man muß also in mindestens $n = 11$ Intervalle unterteilen, um „auf der sicheren Seite“ zu sein.

Aufgabe 4 (Differentialgleichungen):

(Bearbeitungszeit ca. 20 min.)

(a) $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + h \cdot (-2 \cdot 1 \cdot 1) = 1 - 2h.$

(b) Für $h = 0.5$ ist $y_1 = 0$. Für $k \geq 1$ ergibt sich damit sukzessive

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) = y_k \cdot (1 - 2hx_k) = 0.$$

(c) In der Darstellung $y_{k+1} = y_k \cdot (1 - 2hx_k)$ ist für $h > 0.5$ der Faktor $(1 - 2hx_k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ negativ (denn $x_k \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$); damit bilden die y_k eine *alternierende* Folge, d.h. die Näherungswerte oszillieren um $y = 0$ herum.

(d) $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1 + h \cdot (-2 \cdot (1+h) \cdot y_1) \implies y_1 = \frac{1}{1 + 2h + 2h^2}.$

(e) Aus der Darstellung

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+1}, y_{k+1}) = y_k - 2hx_{k+1}y_{k+1}$$

folgt

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + 2hx_{k+1}}; \quad (*)$$

wegen $x_{k+1} > 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist der Nenner dieses Ausdrucks für beliebige $h > 0$ größer als 1, d.h. die Folge der Näherungswerte fällt streng monoton auf 0 ab. Je größer h gewählt wird, desto schneller fallen die y_k ab.

(f) Das Verhalten der Näherungslösungen zum vollimpliziten Eulerverfahren ist hier für beliebige Schrittweiten qualitativ richtig, während die Näherungen zum expliziten Eulerverfahren qualitativ falsch werden, wenn $h \geq 0.5$ gewählt wird. Das impliziten Verfahren ist hier also zu bevorzugen, zumal auch der i.a. mit impliziten Verfahren verbundene Zusatzaufwand, in jedem Rechenschritt eine implizite Gleichung numerisch lösen zu müssen, entfällt: Die entstehende Gleichung läßt sich analytisch lösen, vgl. (*).