FACHHOCHSCHULE FÜR TECHNIK ESSLINGEN

Wintersemester 2005 / 06		Zahl der Blätter: 2 Blatt 1
Fachbereiche:	Informationstechnik (IT)	Studiengang: NT, SW, TI
Prüfungsfach:	Numerische Methoden	Fachnummer: 4094
Hilfsmittel:	2 Seiten Manuskript	Zeit: 60 min

Aufgabe 1 (Newtonverfahren):

(a) Beschreiben Sie in ein paar Stichworten die Grundidee des Newtonverfahrens zur Bestimmung von Nullstellen von Funktionen $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$!

(b) Mit Hilfe des Newtonverfahrens soll eine Nullstelle der Funktion

$$\boldsymbol{f}(x,y) \;:=\; \begin{pmatrix} (x-1)^2 + y^2 - 4 \\ x^2 + (y-1)^2 - 4 \end{pmatrix}$$

bestimmt werden.

1. Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (2, 1)$ einen Schritt des Newtonverfahrens durch!
2. Veranschaulichen Sie sich das gestellte Problem in der $x - y-$Ebene anhand einer Skizze! Wie viele Nullstellen besitzt die Funktion $\boldsymbol{f}$ demnach? Gegen welche der Nullstellen konvergiert das Newtonverfahren ausgehend vom Startwert in Aufgabenteil **(a)**?
3. Bestimmen Sie *alle* Startwerte, für die das Newtonverfahren bereits im ersten Schritt *scheitert*! Tragen Sie die Menge dieser Werte in Ihre Skizze aus Aufgabenteil **(b)** ein!

Aufgabe 2 (Lineare Gleichungssysteme):

(a) Geben Sie zwei Nachteile an, die das Gauß'sche Eliminationsverfahren gegenüber dem Gauß-Seidel-Verfahren für „sehr große" lineare Gleichungssysteme aufweist!

(b) Kann man sicher sein, daß das Gauß-Seidel-Verfahren für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und den Startvektor $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}) = (0, -1, 1, 2)$ konvergiert? (Begründung!)

(c) Führen Sie einen Iterationsschritt des Gauß-Seidel-Verfahrens für das lineare Gleichungssystem und den Startvektor aus Aufgabenteil **(b)** durch, d.h. berechnen Sie die Näherung $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)})$!

Aufgabe 3 (Integration):

(a) Was ist die Grundidee einer Interpolationsquadratur? (Ein bis zwei Sätze oder ein paar Stichworte genügen!)

(b) Betrachtet wird das bestimmte Integral

$$I := \int_{-2}^{2} f(x)\,dx \qquad \text{mit} \qquad f(x) := \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{$*$}$$

1. Berechnen Sie den Näherungswert, der sich für I aus der Simpsonregel mit Stützstellenabstand $h = 1$ ergibt!
2. Wie groß ist der Fehler dieser Näherung maximal? In welchem Intervall liegt also der Wert des Integrals sicher? (Hinweis: $||f^{(4)}||_\infty = 24$.)
3. In wie viele Intervalle muß man bei Anwendung der zusammengesetzten Trapezregel mit äquidistanten Stützstellen das Integrationsintervall $[-2, 2]$ mindestens unterteilen, damit die Abweichung des Näherungswertes vom exakten Wert des Integrals $(*)$ sicher kleiner ist als 0.1? (Hinweis: $||f''||_\infty = 2$.)

Aufgabe 4 (Differentialgleichungen):

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = -2 \cdot x \cdot y\,, \qquad y(1) = 1\,,$$

das die exakte Lösung $y(x) = e^{(1-x^2)}$ besitzt.

(a) Führen Sie einen Schritt des expliziten Eulerverfahrens mit Schrittweite h durch, um einen Näherungswert für $y(1+h)$ zu bestimmen!

(b) Wie sehen die weiteren Näherungswerte y_k des expliziten Eulerverfahrens aus, wenn man $h = 0.5$ wählt?

(c) Was passiert, wenn man beim expliziten Eulerverfahren sogar $h > 0.5$ wählt? (Kurze rechnerische Begründung!)

(d) Führen Sie einen Schritt des „vollimpliziten“ Eulerverfahrens mit Schrittweite h durch, um einen zweiten Näherungswert für $y(1+h)$ zu bestimmen!

(e) Berechnen Sie die weiteren Näherungswerte y_k des vollimpliziten Eulerverfahrens! Wie verhalten sich diese Näherungswerte in Abhängigkeit von der Schrittweite h?

(f) Welches Verfahren würden Sie für das vorliegende AWP bevorzugen? (Ein Satz Begründung!)