FACHHOCHSCHULE FÜR TECHNIK ESSLINGEN

Wintersemester 2004 / 2005		– Lösungen –
Fachbereiche:	Informationstechnik (IT)	Studiengang: NT, SW, TI
Prüfungsfach:	Numerische Methoden	Fachnummer: 4094
Hilfsmittel:	Literatur, Manuskript	Zeit: 60 min

Aufgabe 1 (Newtonverfahren):

(Bearbeitungszeit ca. 10 min.)

(a) Linearisierung: Ausgehend von einem Punkt $P_k(x_k|f(x_k))$ ergibt sich die neue Näherung x_{k+1} als Nullstelle der Tangente an den Funktionsgraphen $y = f(x)$ im Punkt P_k.

(b) Vorteil: Quadratische Konvergenz (bei einfachen Nullstellen), also erheblich schneller als das Bisektionsverfahren; Nachteile: Das Newtonverfahren konvergiert nicht immer, und die Funktion f muß nicht nur stetig, sondern sogar differenzierbar sein.

(c) Allgemein lautet die Iterationsvorschrift

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \mathbf{J}^{-1}(x_k, y_k) \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{pmatrix} ;$$

darin ist $\mathbf{J}$ die Jacobimatrix der Funktion. Hier ist für den ersten Schritt

$$\mathbf{J}(-1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(-1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(-1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(-1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(-1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathbf{J}^{-1}(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2 (Überbestimmte lineare Gleichungssysteme):

(Bearbeitungszeit ca. 10 min.)

(a) Meßwerterfassung: Typischerweise mißt man öfter als zur rechnerischen Bestimmung der gesuchten Größen erforderlich wäre. Durch die Redundanz der Messungen läßt sich der Einfluß von Meßfehlern bei den Einzelmessungen reduzieren.

(b) Minimierung der Fehlerquadratsumme. Die Näherungslösung $\boldsymbol{x}$ wird so bestimmt, daß

$$|\boldsymbol{r}|^2 := \left|\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\right|^2$$

minimal wird.

(c) Das überbestimmte lineare Gleichungssystem lautet

$$0 \cdot m + b = 1 , \qquad 2 \cdot m + b = 2 , \qquad 4 \cdot m + b = 5$$

oder in Matrix-Vektorform

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Transformation in ein quadratisches LGS durch Multiplikation mit der Transponierten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad m = 1,\ b = 2/3 .$$

Aufgabe 3 (Bézierkurven):

(Bearbeitungszeit ca. 10 min.)

(a) Siehe Zeichnung bei Aufgabenteil **(c)**! Die Konstruktion zu $t = 0.4$ ist blau dargestellt.

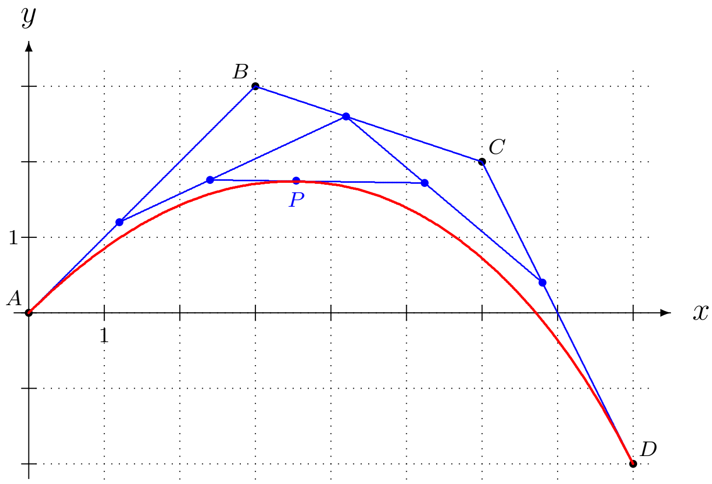
(b) Zunächst ist

$$\boldsymbol{x}(t) \;=\; (1-t)^3 \cdot \boldsymbol{a} \;+\; 3t(1-t)^2 \cdot \boldsymbol{b} \;+\; 3t^2(1-t) \cdot \boldsymbol{c} \;+\; t^3 \cdot \boldsymbol{d} .$$

Mit den angegebenen Punkten folgt

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(1-t)^3 + 9t(1-t)^2 + 18t^2(1-t) + 8t^3 \\ 0(1-t)^3 + 9t(1-t)^2 + \ \ 6t^2(1-t) - 2t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^3 + 9t \\ t^3 - 12t^2 + 9t \end{pmatrix} .$$

(c)



Aufgabe 4 (Splines):

(Bearbeitungszeit ca. 15 min.)

(a) Bilanz: Zu bestimmen sind $3n$ Koeffizienten. Die Interpolationseigenschaft führt auf $2n$ Bedingungen, die C^1−Eigenschaft zu weiteren $n-1$ Bedingungen. Mehr kann man also nicht fordern; es bleibt *eine* Bedingung übrig, die man durch Vorgabe einer Randbedingung festlegen kann.

(b) Die Interpolationseigenschaft jeweils am linken Intervallrand führt auf

$$a_0 = 0 , \quad a_1 = 1 .$$

Die Interpolationseigenschaft jeweils am rechten Intervallrand führt auf

$$b_0 + c_0 = 1 , \quad b_1 + c_1 = -2 ; \tag{1}$$

darin sind die Werte für die Koeffizienten a_0 und a_1 bereits eingesetzt. Die Differenzierbarkeit am Stützpunkt P_1 führt auf

$$b_0 + 2c_0 = b_1 \,. \tag{2}$$

Aus der Randbedingung $s_0'(0) = 2$ ergibt sich jetzt zunächst $b_0 = 2$. Setzt man dies in die erste Gleichung von (1) ein, erhält man $c_0 = -1$. Aus (2) ergibt sich dann $b_1 = 0$, aus der zweiten Gleichung von (1) dann schließlich $c_1 = -2$. Insgesamt lautet die Gleichung des Splines

$$s(x) \;=\; \begin{cases} 2x \;-\; x^2\,, & x \in [0,1)\,; \\ 1 \;-\; 2(x-1)^2\,, & x \in [1,2]\,. \end{cases}$$

Aufgabe 5 (Anfangswertprobleme):

(Bearbeitungszeit ca. 12 min.)

(a) Ausgehend vom alten – d.h. bekannten – Näherungspunkt $P_k(x_k|y_k)$ geht man ein vorher durch die Schrittweite h festgelegtes Stück weit der Tangente an die Lösungskurve durch P_k entlang und erhält so den neuen Näherungspunkt $P_{k+1}(x_{k+1}|y_{k+1})$.

(b) Das Euler'sche Polygonzugverfahren benötigt pro Iterationsschritt *eine* Funktionsauswertung, das Heunverfahren *zwei*. Der Aufwand zur Berechnung einer Näherungslösung auf einem Intervall $[x_0, x_{max}]$ (im wesentlichen die Anzahl der erforderlichen Funktionsauswertungen) ist also vergleichbar, wenn man als Eulerschrittweite die *halbe* Heunschrittweite wählt: $h_{EPZ} \,:\, h_{Heun} \;=\; 1:2$.

(c) Für das Heunverfahren hat man mit $f(x,y) = 2xy$

$$\begin{cases} x^* \;=\; 0+h \;=\; h\,, \\ y^* \;=\; 1+h\cdot f(0,1) \;=\; 1\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \;=\; 0+h\,, \\ y_1 \;=\; 1+\frac{h}{2}\cdot\big(f(0,1)+f(h,1)\big) \;=\; 1+h^2\,. \end{cases}$$

Für das Euler'sche Polygonzugverfahren ergibt sich entsprechend

$$\begin{cases} x_1 \;=\; 0+\frac{h}{2} \;=\; \frac{h}{2}\,, \\ y_1 \;=\; 1+\frac{h}{2}\cdot f(0,1) \;=\; 1\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \;=\; \frac{h}{2}+\frac{h}{2} \;=\; h\,, \\ y_2 \;=\; 1+\frac{h}{2}\cdot f\big(\frac{h}{2},1\big) \;=\; 1+\frac{h^2}{2}\,. \end{cases}$$

Damit hat man

$$Y_{EPZ}(h) \;=\; 1+\frac{h^2}{2}\,, \qquad Y_{Heun}(h) \;=\; 1+h^2\,.$$

Taylorentwicklung der Lösungsfunktion $y(x)$ an der Stelle $x = h$ ergibt

$$y(h) \;=\; e^{(h^2)} \;=\; 1 \;+\; h^2 \;+\; R(h)\,;$$

dabei ist $R(h) > 0$, denn alle Terme der Taylorentwicklung sind positiv. Es ist also

$$y(h) - Y_{EPZ}(h) \;=\; \frac{h^2}{2} \;+\; R(h)\,, \qquad y(h) - Y_{Heun}(h) \;=\; R(h)\,,$$

d.h. der Fehler des Euler-Polygonzugverfahrens ist um $h^2/2$ größer als der Fehler des Heunverfahrens.