

FACHHOCHSCHULE FÜR TECHNIK ESSLINGEN

Sommersemester 2005	– Lösungen –
Fachbereiche: Informationstechnik (IT)	Studiengang: NT, SW, TI
Prüfungsfach: Numerische Methoden	Fachnummer: 4094
Hilfsmittel: Manuskript	Zeit: 60 min

Aufgabe 1 (Newtonverfahren):

(Bearbeitungszeit ca. 15 min.)

- (a) Allgemein lautet die Iterationsvorschrift

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \mathbf{J}^{-1}(x_k, y_k) \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{pmatrix};$$

darin ist $\mathbf{J}$ die Jacobimatrix der Funktion $\mathbf{f}$.

- (b) Jacobimatrix der Funktion $\mathbf{f}(x, y)$:

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(x) & 2 \\ 3 & -e^y \end{pmatrix}.$$

Am Startwert $(x_0, y_0) = (\pi, 0)$ hat man

$$\mathbf{J}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1}(\pi, 0) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $\mathbf{f}(\pi, 0) = (1, 3\pi - 1)$ ergibt sich aus der allgemeinen Formel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3\pi - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- (c) Das Newtonverfahren scheitert im ersten Schritt, wenn die Jacobimatrix $\mathbf{J}(x_0, y_0)$ nicht invertierbar ist, d.h. wenn gilt $\det(\mathbf{J}(x_0, y_0)) = 0$. Mit

$$\det(\mathbf{J}(x_0, y_0)) = -e^{y_0} \cdot \sin(x_0) - 6$$

lautet die gesuchte Bedingung

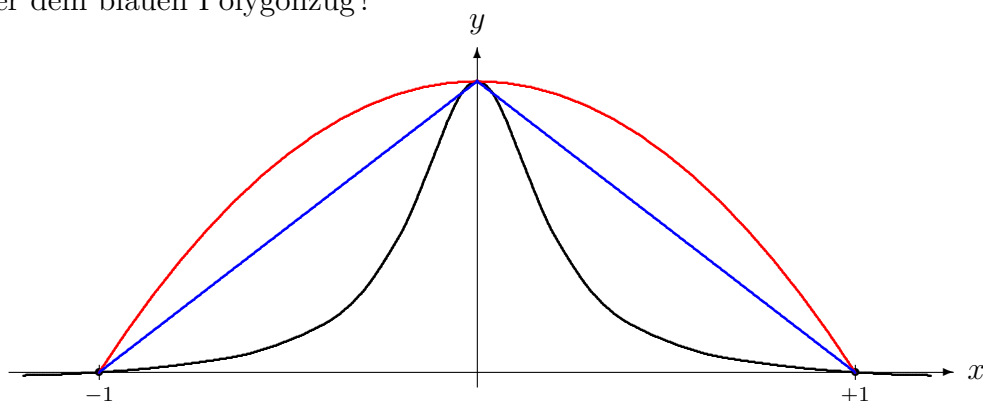
$$e^{y_0} \cdot \sin(x_0) = -6.$$

Aufgabe 2 (Integration):

(Bearbeitungszeit ca. 10 min.)

- (a) Für die Kepler'sche Faßregel sind 3 Funktionsauswertungen (nämlich $f(-1)$, $f(0)$ und $f(1)$) erforderlich. Damit kann man für die Trapezregel $h = 1$ wählen und hat dann die gleichen Funktionsauswertungen vorzunehmen.
- (b) Das von der Kepler'schen Faßregel gelieferte Interpolationspolynom ist eine zur y -Achse symmetrische, nach unten geöffnete Parabel (rote Kurve in der folgenden Zeichnung).

Natürlich weicht der Flächeninhalt unter dieser Parabel stärker vom gesuchten Flächeninhalt ab als der bei der zusammengesetzten Trapezregel zu berechnende Flächeninhalt unter dem blauen Polygonzug!



- (c) Jetzt wird die Simpsonformel besser sein: Denn diese berücksichtigt die Krümmung der gegebenen Funktion, was bei der zusammengesetzten Trapezregel nicht der Fall ist.

Aufgabe 3 (Interpolation):

(Bearbeitungszeit ca. 10 min.)

- (a) Vorteile sind zum einen der geringere Rechenaufwand; zum anderen muß man bei Hinzunahme eines Stützpunktes nicht wieder von vorne losrechnen, sondern kann das Schema um eine Zeile ergänzen, d.h. die „alten“ Ergebnisse weiter verwenden.
- (b) Schema:

x_k	y_k	fortgesetzte dividierte Differenzen
-1.5	+4.0	$\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$ -6.0 $+4.0$ $+2.0$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $+5.0$ -1.0 $\searrow$ $\nearrow$ -2.0
-0.5	-2.0	
+0.5	+2.0	
+1.5	+4.0	

$$\Rightarrow p(x) = 4 - 6 \cdot (x+1.5) + 5 \cdot (x+1.5)(x+0.5) - 2 \cdot (x+1.5)(x+0.5)(x-0.5).$$

Aufgabe 4 (Anfangswertprobleme):

(Bearbeitungszeit ca. 25 min.)

- (a) Erster Eulerschritt:

$$\begin{cases} x_{1,EPZ} &= x_0 + \frac{h}{2} = \frac{h}{2}, \\ y_{1,EPZ} &= y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(0,1) = 1 + \frac{h}{2} \cdot 2 = 1 + h; \end{cases}$$

Zweiter Eulerschritt:

$$\begin{cases} x_{2,EPZ} &= x_1 + \frac{h}{2} = h, \\ y_{2,EPZ} &= y_1 + \frac{h}{2} \cdot f(x_1, y_1) = 1 + h + \frac{h}{2} \cdot 2(1 + h) = 1 + 2h + h^2. \end{cases}$$

(b) Prädiktorschritt ($\hat{=}$ erster Eulerschritt aus Aufgabenteil (a)):

$$\begin{cases} x^* &= x_0 + \frac{h}{2} = \frac{h}{2}, \\ y^* &= y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(0,1) = 1 + \frac{h}{2} \cdot 2 = 1 + h; \end{cases}$$

Korrektorschritt:

$$\begin{cases} x_{1,MPR} &= x_0 + h = h, \\ y_{1,MPR} &= y_0 + h \cdot f(x^*, y^*) = 1 + h \cdot 2(1 + h) = 1 + 2h + 2h^2. \end{cases}$$

(c) Es ist

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \dots$$

und damit (Substitution $t = 2h$)

$$y(h) = e^{2h} = 1 + 2h + 2h^2 + R(h).$$

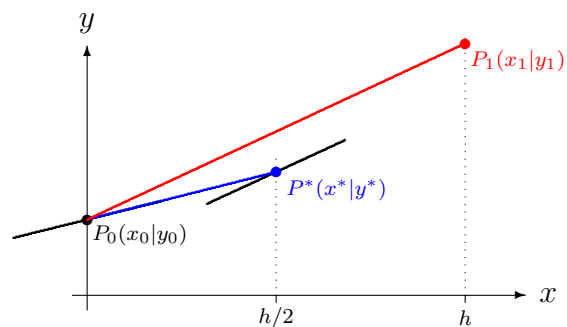
Weil für $h > 0$ alle Terme der Taylorreihe positiv sind, ist der Rest $R(h) > 0$. Mit den Aufgabenteilen (a) und (b) ist

$$|y(h) - y_{2,EPZ}| = h^2 + R(h), \quad |y(h) - y_{1,MPR}| = R(h);$$

der Fehler, den man mit dem Euler-Polygonzug macht, ist also um den Summanden h^2 größer als der Fehler, den man mit der Mittelpunktsregel macht.

(d) Grafische Darstellung:

schwarz: Linienelemente des Richtungsfeldes;
blau: Prädiktorschritt („halber Eulerschritt“)
rot: Korrektorschritt



(e) *Explizit*, weil man aus der Näherung am „alten“ Punkt P_k ohne Iterationsschritte die Näherung am Folgepunkt P_{k+1} berechnen kann (die Verfahrensvorschrift ist nach y_{k+1} aufgelöst);

Einschrittverfahren, weil zur Berechnung der Näherung P_{k+1} nur *ein* Schritt in die „Vergangenheit“ zurückgegangen wird, d.h. weil nur Informationen des unmittelbaren Vorgängerpunktes P_k verwendet werden.