FACHHOCHSCHULE FÜR TECHNIK ESSLINGEN

Sommersemester 2005		Zahl der Blätter: 2 Blatt 1
Fachbereiche:	Informationstechnik (IT)	Studiengang: NT, SW, TI
Prüfungsfach:	Numerische Methoden	Fachnummer: 4094
Hilfsmittel:	Manuskript	Zeit: 60 min

Aufgabe 1 (Newtonverfahren):

Gegeben ist die Funktion

$$\boldsymbol{f}(x,y) \;:=\; \begin{pmatrix} 2y - \cos(x) \\ 3x - e^{y} \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der Nullstellen von $\boldsymbol{f}$ soll das Newtonverfahren verwendet werden.

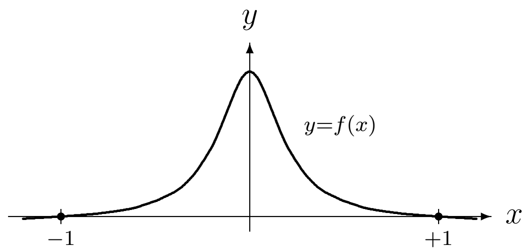
(a) Wie lautet allgemein die Vorschrift des Newtonverfahrens?

(b) Führen Sie einen Schritt des Newtonverfahrens für $\boldsymbol{f}$ durch; wählen Sie dabei die Startwerte $(x_0, y_0) = (\pi, 0)$!

(c) Geben Sie eine Bedingung an die Startwerte (x_0, y_0) an, unter der das Newtonverfahren bereits im ersten Schritt scheitert!

Aufgabe 2 (Integration):

Gegeben ist die nebenstehend skizzierte Funktion f (mit $f(\pm 1) = 0$), gesucht ist ein Näherungswert für den Flächeninhalt zwischen der x−Achse und der Kurve $y = f(x)$ im Intervall $[-1, 1]$. Zur Berechnung soll



1. die Kepler'sche Faßregel (Unterteilung von $[-1, 1]$ in *ein* Doppelintervall)
2. die zusammengesetzte Trapezregel (Stützstellenabstand h)

verwendet werden.

(a) Der Rechenaufwand ($\widehat{=}$ Anzahl der erforderlichen Funktionsauswertungen) soll für beide Methoden gleich groß sein. Wie muß man dann den Stützstellenabstand h für die zusammengesetzte Trapezregel wählen?

(b) Welche der beiden Methoden liefert damit in diesem Fall das bessere Ergebnis? (Begründung z.B. anhand einer Skizze.)

(c) Wie fällt der Vergleich aus, wenn man – wieder bei gleichem Rechenaufwand – für erheblich kleineren Stützstellenabstand (z.B. $h = 0.1$) die Simpsonregel und die zusammengesetzte Trapezregel verwendet? (Begründung in *einem* Satz genügt!)

Aufgabe 3 (Interpolation):

Gesucht ist das Interpolationspolynom durch die Punkte

$$A(-1.5|4.0)\ ,\quad B(-0.5|-2.0)\ ,\quad C(0.5|2.0)\ ,\quad D(1.5|4.0)\ .$$

(a) Nennen Sie einen Vorteil des Schemas der dividierten Differenzen zur Bestimmung dieses Interpolationspolynoms gegenüber dem „direkten“ Ansatz!

(b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom in der Form

$$p(x) \;=\; c_0 \;+\; c_1 \cdot (x-x_0) \;+\; c_2 \cdot (x-x_0)\cdot(x-x_1) \;+\; \ldots !$$

Aufgabe 4 (Anfangswertprobleme):

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 2 \cdot y(x)\ , \qquad y(0) = 1\ .$$

(a) Führen Sie *zwei* Schritte des Euler-Polygonzugverfahrens mit Schrittweite $h/2$ durch, um einen Näherungswert für $y(h)$ zu bestimmen!

(b) Führen Sie *einen* Schritt mit der Mittelpunktsregel und Schrittweite h durch, um einen weiteren Näherungswert für $y(h)$ zu bestimmen!

(c) Die exakte Lösung des Anfangswertproblems lautet $y(x) = e^{2x}$. Zeigen Sie, daß der mit der Mittelpunktsregel berechnete Näherungswert für alle $h > 0$ genauer ist als der mit dem Euler-Polygonzug berechnete! (Hinweis: Taylorentwicklung).

(d) Stellen Sie die Idee der Mittelpunktsregel grafisch dar!

(e) Erläutern Sie in zwei Sätzen, warum die Runge-Kutta-Verfahren zur Klasse der expl<u>iziten</u> <u>Einschritt</u>verfahren gehören!