HOCHSCHULE ESSLINGEN

Sommersemester 2019		Blatt 1 von 5
Studiengänge:	RMM Masterstudiengang	Sem. 1 und Wiederholer
Prüfungsfach:	Mathematische Methoden	Fachnummern: 1181014
Hilfsmittel:	Literatur, Manuskript; keine Taschenrechner oder andere elektronische Hilfsmittel	Zeit: 90 min
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!		

Aufgabe 1 (Jacobiverfahren – 17 Punkte):

(a) Die Matrix muß symmetrisch und positiv definit sein; es muß also gelten

$$a_{23} \stackrel{!}{=} 1 \quad \wedge$$
$$\wedge \quad A_1 = 3 \stackrel{!}{>} 0 \quad \wedge \quad A_2 = 8 \stackrel{!}{>} 0 \quad \wedge \quad A_3 = 3(4a_{33} - a_{23}) - 4a_{33} \stackrel{!}{>} 0.$$

Daraus folgt

$$a_{23} = 1 \quad \wedge \quad a_{33} > \frac{3}{8}\,; \qquad b_1 \text{ ist beliebig.}$$

(b) Die Matrix muß strikt zeilendiagonaldominat sein; es muß also gelten

$$3 \stackrel{!}{>} 2 \quad \wedge \quad 4 \stackrel{!}{>} 2 + |a_{23}| \quad \wedge \quad |a_{33}| \stackrel{!}{>} 1\,.$$

Daraus folgt

$$|a_{23}| < 2 \quad \wedge \quad |a_{33}| > 1\,; \qquad b_1 \text{ ist beliebig.}$$

(c) Man erhält schrittweise

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \left(= \mathbf{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}\right)$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/3 \cdot (6 - 2 \cdot 3 - 0 \cdot 6) \\ 1/4 \cdot (12 - 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 6) \\ 1/3 \cdot (18 - 0 \cdot 2 - 1 \cdot 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(d) Die *à posteriori* Abschätzung aus der Vorlesung lautet

$$\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^*\|_x \leqslant \frac{\|\mathbf{M}\|_X}{1 - \|\mathbf{M}\|_X} \|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{(n-1)}\|_x\,; \tag{$*$}$$

darin bezeichnet $\|.\|_X$ eine zur Vektornorm $\|.\|_x$ konsistente Matrixnorm.

Für das Jacobiverfahren ist

$$\mathbf{M} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \left(\mathbf{L} + \mathbf{U}\right) =$$
$$= -\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist z.B. für die Zeilensummennorm

$$\|\mathbf{M}\|_R \;=\; \frac{3}{4}\,.$$

Mit der Maximumnorm als Vektornorm und Aufgabenteil **(c)** ist weiter

$$\|\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^1\|_\infty \;=\; \max\big\{|-2|, |0.5|, |-1|\big\} \;=\; 2\,.$$

Damit folgt aus $(*)$

$$\|\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \;\leqslant\; \frac{3/4}{1/4}\cdot 2 \;=\; 6$$

(also noch ziemlich schlecht).

(e) Wenn man mit der Startschätzung $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ beginnt, so ist $\boldsymbol{x}^{(1)} = \mathbf{D}^{-1}\cdot\boldsymbol{b}$; aus der *à priori* Abschätzung der Vorlesung wird dann gerade die angegebene Ungleichung.

Vorteil der Ungleichung: Man erhält eine Abschätzung, ohne einen einzigen Iterationsschritt durchführen zu müssen – für die Abschätzung der Vorlesung benötigte man immerhin noch *einen* Iterationsschritt.

Nachteil: Die Ungleichung gilt *nur* für die Startschätzung $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$. Meist hat man eine bessere Startschätzung, von der aus man weniger Iterationsschritte zum Erreichen einer vorgegebenen Genauigkeit durchführen muß. Außerdem muß man in aller Regel sowieso mehrere Iterationsschritte durchführen, sodaß der erste Schritt für die Abschätzung aus der Vorlesung keinen zusätzlichen Rechenaufwand verursacht.

Aufgabe 2 (Reihen – 10 Punkte):

(a) Mit der Substitution $z = x^2$ ist

$$\sin(x^2) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\,x^{4k-2} \;=\; x^2 \;-\; \frac{x^6}{3!} \;+\; \frac{x^{10}}{5!} \;\mp\ldots$$

(b) Man berechnet

$$I \;=\; \int_0^1 \sin(x^2)\,dx \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\,x^{4k-2}\,dx \;=$$

$$=\; \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{(4k-1)(2k-1)!}\,x^{4k-1}\right]_0^1 \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(4k-1)(2k-1)!} \;=$$

$$=\; \frac{1}{3\cdot 1!} \;-\; \frac{1}{7\cdot 3!} \;+\; \frac{1}{11\cdot 5!} \;\mp\ldots \;=\; \frac{1}{3} \;-\; \frac{1}{42} \;+\; \frac{1}{1320} \;\mp\ldots$$

(c) Der $k-$te Term der Reihe lautet

$$a_k \;=\; \frac{(-1)^{k-1}}{(4k-1)(2k-1)!}\,;$$

mit dem Quotientenkriterium erhält man

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \;=\; \frac{\dfrac{1}{(4(k{+}1)-1)(2(k{+}1)-1)!}}{\dfrac{1}{(4k-1)(2k-1)!}} \;=\; \frac{(4k-1)(2k-1)!}{(4k+3)(2k+1)!}$$

$$<\; \frac{1}{2k(2k+1)} \;<\; 1\,,$$

d.h. die Reihe ist absolut konvergent.

(d) Mit dem Leibnizkriterium gilt

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(4k-1)(2k-1)!} \right| \leqslant \frac{1}{(4(n+1)-1)(2(n+1)-1)!} = $$

$$= \frac{1}{(4n+3)(2n+1)!}\,.$$

Man muß also n so groß bestimmen, daß gilt

$$\frac{1}{(4n+3)(2n+1)!} \leqslant 10^{-3} \quad \text{d.h.} \quad (4n+3)(2n+1)! \geqslant 1\,000\,.$$

Dazu genügt $n = 2$ (es ist $11 \cdot 5! = 1\,320$); der gesuchte Näherungswert lautet also

$$I \approx \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{42} = \tfrac{13}{42}\,.$$

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen – 11 Punkte):

Mit $\boldsymbol{w} = (x, y, z)$ lautet das Problem in Matrix-Vektor-Form

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{w}\,, \qquad \boldsymbol{w}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Exponentialansatz

$$\boldsymbol{w}(t) = e^{\lambda t}\,\boldsymbol{c}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^3 \text{ gesucht}$$

führt auf die Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}\,.$$

Die Eigenwerte erhält man aus der charakteristischen Gleichung:

$$0 = det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2+\lambda)(3+\lambda)\,,$$

es ist

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3\,.$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$: Aus der Eigenwertgleichung folgt z.B. $\boldsymbol{c}_1 = (0, 0, 1)$.

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -2$: Aus der Eigenwertgleichung folgt z.B. $\boldsymbol{c}_2 = (1, 1, -2)$.

Eigenvektor zu $\lambda_3 = -3$: Aus der Eigenwertgleichung folgt z.B. $\boldsymbol{c}_3 = (0, 1, -1)$ (Hinweis)

Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungs-Systems lautet also

$$\boldsymbol{w}(t) \;=\; C_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \;+\; C_2e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \;+\; C_3e^{-3t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \qquad C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}.$$

Anfangswert:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \;=\; \boldsymbol{w}(0) \;=\; C_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \;+\; C_2\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \;+\; C_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Daraus folgt $C_1=1,\ C_2=1,\ C_3=-1$ und

$$\boldsymbol{w}(t) \;=\; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \;+\; e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \;-\; e^{-3t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (Anfangswertprobleme / Reihen – 11 Punkte):

(a) Es ist

$$t_0=0,\quad w_0=1,\quad t_1=t_0+h=h\,.$$

Weiter berechnet man der Reihe nach

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0,w_0) \;=\; f(0,1) \;=\; 1\,,\\
k_2 &= f\bigl(t_0+\tfrac{h}{2}, w_0+\tfrac{hk_1}{2}\bigr) \;=\; \bigl(\tfrac{h}{2}, 1+\tfrac{h}{2}\bigr) \;=1+h\,,\\
k_3 &= f\bigl(t_0+h, w_0+hk_1+2hk_2\bigr) \;=\; f\bigl(h, 1-h+2h(1+h)\bigr) \;=\\
&= \frac{1+2h}{1+h}\,(1+h+2h^2) \;=\; \frac{1+3h+4h^2+4h^3}{1+h}\\
w_1 &= w_0+\frac{h}{6}\,(k_1+4k_2+k_3) \;=\; 1+\frac{h}{6}\Bigl(1+4(1+h)+\frac{1+3h+4h^2+4h^3}{1+h}\Bigr)\\
&= 1+\frac{h}{6}\Bigl(5+4h+\frac{1+3h+4h^2+4h^3}{1+h}\Bigr)
\end{aligned}$$

(b) Mit

$$\frac{1}{1+t} \;=\; 1 \,-\, t \,+\, t^2 \,-\, t^3 \,+\, t^4 \,+\, O(t^5)$$

und

$$\begin{aligned}
e^{2t} &= 1 \,+\, 2t \,+\, \frac{(2t)^2}{2} \,+\, \frac{(2t)^3}{3!} \,+\, \frac{(2t)^4}{4!} \,+\, O(t^5)\\
&= 1 \,+\, 2t \,+\, 2t^2 \,+\, \frac{4t^3}{3} \,+\, \frac{2t^4}{3} \,+\, O(t^5)
\end{aligned}$$

erhält man mit dem Cauchyprodukt

$$y(t) \;=\; \frac{e^{2t}}{1+t} \;=\; 1 \,+\, t+t^2 \,+\, \frac{t^3}{3} \,+\, \frac{t^4}{3} \,+\, O(t^5)\,;$$

damit lautet das gesuchte Taylorpolynom

$$p_4(t) \;=\; 1 \,+\, t+t^2 \,+\, \frac{t^3}{3} \,+\, \frac{t^4}{3}\,.$$

Aufgabe 5 (Anfangswertprobleme – 9 Punkte):

(a) Es ist

$$t_0 = 0, \quad w_0 = 1, \quad t_1 = t_0 + h = h$$

und mit der impliziten Rechteckregel

$$w_1 \;=\; w_0 + hf(t_1, w_1) \;=\; 1 + h(w_1^4 - 2w_1^2)\,.$$

(b) Die Iterationsvorschrift lautet

$$w_1^{(0)} \;=\; 1\,, \qquad w_1^{(n+1)} \;=\; 1 + h\Big(\big(w_1^{(n)}\big)^4 - 2\big(w_1^{(n)}\big)^2\Big)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Damit erhält man

$$w_1^{(1)} \;=\; 1 + h\Big(1^4 - 2\cdot 1^2\Big) \;=\; 1 - h\,,$$

$$w_1^{(2)} \;=\; 1 + h\Big((1-h)^4 - 2\cdot(1-h)^2\Big) \;=\; 1 - h + 4h^3 - 4h^4 + h^5$$

(c) Da $y = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung ist (zugehöriger Graph ist die $t-$Achse) und sich Lösungskurven im Richtungsfeld nicht berühren oder schneiden können muß eine Lösungskurve, die in der oberen Halbebene startet, auch in der oberen Halbebene bleiben. Wegen $y(0) = 1$ muß die Lösung des Anfangswertproblems also positiv bleiben.

Weil $y = \sqrt{2}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist muß mit analoger Argumentation wie eben für die Lösung des Anfangswertproblems gelten $y(t) < \sqrt{2}$.

Wenn aber $y(t) \in (0, \sqrt{2})$ ist, ist $y'(t) < 0$, d.h. y ist streng monoton fallend.