HOCHSCHULE ESSLINGEN

Sommersemester 2019		Blatt 1 von 3
Studiengänge:	RMM Masterstudiengang	Sem. 1 und Wiederholer
Prüfungsfach:	Mathematische Methoden	Fachnummern: 1181014
Hilfsmittel:	Literatur, Manuskript; keine Taschenrechner oder andere elektronische Hilfsmittel	Zeit: 90 min
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!		

Gesamtpunktzahl: 58

Aufgabe 1 (Jacobiverfahren – 17 Punkte):

Gegeben sind die Matrix $\mathbf{A}$ und die Vektoren $\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{b}$ mit

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix};$$

darin sind a_{23}, a_{33}, b_1 reelle Parameter.

Betrachtet wird das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

(a) Unter welchen Bedingungen an a_{23}, a_{33}, b_1 kann man garantieren, daß das Verfahren des steilsten Abstiegs zur Lösung des linearen Gleichungssystems konvergiert?

(b) Unter welchen Bedingungen an a_{23}, a_{33}, b_1 kann man garantieren, daß das Jacobiverfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems konvergiert?

Für die Aufgabenteile (c) und (d) ist $\boldsymbol{a_{23} = -1,\ a_{33} = 3,\ b_1 = 6}$.

(c) Führen Sie ausgehend von $\boldsymbol{x}^{(0)}$ *zwei* Schritte des Jacobiverfahrens durch, um Näherungswerte $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}$ für die exakte Lösung $\boldsymbol{x}^*$ des linearen Gleichungssystems zu berechnen.

(d) Verwenden Sie eine *à posteriori* Abschätzung, um eine Aussage über die Genauigkeit der Näherung $\boldsymbol{x}^{(2)}$ zu gewinnen.

(e) Betrachtet wird jetzt ein beliebiges quadratisches lineares Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$; $\mathbf{M}$ sei die Iterationsmatrix des Jacobiverfahrens und $\mathbf{D}$ der Diagonalanteil der Matrix $\mathbf{A}$. Begründen Sie, warum die folgende Ungleichung eine <u>korrekte</u> *à priori* Abschätzung liefert (*Hinweis:* Aufgabenteil **(c)**):

$$\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \leqslant \frac{\|\mathbf{M}\|_R^n}{1 - \|\mathbf{M}\|_R} \|\mathbf{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}\|_\infty$$

Nennen Sie einen ein Vor- und einen Nachteil dieser Ungleichung gegenüber der *à priori* Abschätzung der Vorlesung.

Aufgabe 2 (Reihen – 10 Punkte):

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sin(x^2)\,.$$

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt 0. Verwenden Sie dazu die Reihe

$$\sin(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\, z^{2k-1}\,.$$

Verlangt sind eine Darstellung mit dem Summensymbol (alternativ ein Ausdruck für den $k-$ten Term) und eine explizite Darstellung der ersten drei Terme.

(b) Verwenden Sie die Taylorreihe aus Aufgabenteil **(a)**, um das bestimmte Integral

$$I := \int_0^1 f(x)\, dx$$

als Zahlenreihe darzustellen. Verlangt sind wieder eine Darstellung mit dem Summensymbol (alternativ ein Ausdruck für den $k-$ten Term) und eine explizite Darstellung der ersten drei Terme.

(c) Weisen Sie mit einem geeigneten Konvergenzkriterium nach, daß die Zahlenreihe für I aus Aufgabenteil **(b)** *absolut* konvergiert.

(d) Bestimmen Sie mit einem geeigneten Konvergenzkriterium und Aufgabenteil **(b)** einen Näherungswert für I, der um höchstens 10^{-3} vom exakten Wert abweicht.

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen – 11 Punkte):

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x\,, & x(0) = 1 \\ \dot{y} = x - 3y\,, & y(0) = 0 \\ \dot{z} = x + 3y\,, & z(0) = 0 \end{cases}$$

Schreiben Sie das Anfangswertproblem in Matrix-Vektor-Form und berechnen Sie seine Lösung.

Hinweis: Ein Eigenwert und ein zugehöriger Eigenvektor lauten $\lambda = -3,\ \boldsymbol{c} = (0, 1, -1)$.

Aufgabe 4 (Anfangswertprobleme / Reihen – 11 Punkte):

Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= \dfrac{1+2t}{1+t} \cdot y(t) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

soll mit dem nebenstehend definierten Runge-Kutta-Verfahren 3. Ordnung und Schrittweite $h > 0$ gelöst werden.

(a) Bestimmen Sie einen Näherungswert w_1 für den Funktionswert $y(t_1)$ der exakten Lösung.

(b) Die exakte Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(t) = \frac{e^{2t}}{1+t}\,.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom 4. Grades für $y(t)$ mit Entwicklungspunkt 0. Verwenden Sie dazu die geometrische Reihe und die Taylorreihe für die Exponentialfunktion.

Aufgabe 5 (Anfangswertprobleme – 9 Punkte):

Das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y^4(t) - 2y^2(t) = y^2(t)\big(y^2(t) - 2\big) \qquad y(0) = 1$$

soll mit der impliziten Rechteckregel („vollimplizites Eulerverfahren“) und Schrittweite $h > 0$ gelöst werden.

Hinweis: Aufgabenteil **(c)** ist unabhängig von den Aufgabenteilen **(a)**, **(b)**.

(a) Leiten Sie eine implizite Formel für den Näherungswert w_1 für den Funktionswert $y(t_1)$ der exakten Lösung an der Stelle t_1 her.

(b) Führen Sie, ausgehend von der Näherung $w_1^{(0)} = y(0)$ *zwei* Schritte eines Iterationsverfahrens durch, um Näherungswerte $w_1^{(1)}, w_1^{(2)}$ für w_1 zu bestimmen.

(c) Zeigen Sie, daß die Lösung des Anfangswertproblems für $t \geqslant 0$ eine positive und streng monoton fallende Funktion ist.