HOCHSCHULE ESSLINGEN

Sommersemester 2018	Blatt 1 von 4
Studiengänge: RMM Masterstudiengang	Sem. 1 und Wiederholer
Prüfungsfach: Modellbildung und Simulation	Fachnummern: 1181007
Hilfsmittel: Literatur, Manuskript; keine Taschenrechner oder andere elektronische Hilfsmittel	Zeit: 90 min
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!	

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme – 17 Punkte):

- (a) Die Matrix muß symmetrisch und positiv (oder negativ) definit sein. Aus der Symmetrie folgt

$$a_{23} = 2,$$

und mit dem Kriterium von Sylvester ergibt sich weiter

$$\begin{cases} A_1 = 4 > 0 & (\checkmark) \\ A_2 = 28 > 0 & (\checkmark) \\ A_3 = 4(8a_{33} - 2a_{23}) - 2(2a_{33} - a_{23}) - 4 > 0 \end{cases}$$

Aus $A_3 > 0$ folgt mit $a_{23} = 2$ schließlich $a_{33} > 4/7$.

- (b) Die Matrix muß strikt diagonaldominant sein, d.h. es muß gelten

$$4 > 3 \quad (\checkmark) \quad \wedge \quad 2 + |a_{23}| < 8 \quad \wedge \quad 1 + |a_{21}| < 8 \quad \wedge \quad 3 < |a_{33}|.$$

Daraus folgt

$$|a_{23}| < 6 \quad \wedge \quad |a_{33}| > 3.$$

- (c) Mit den angegebenen Daten ist

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4} (4 - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) = 1,$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{8} (2 - 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 2) = \frac{1}{2},$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{4} (3 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) = 1.$$

d.h. es ist

$$\mathbf{x}^{(1)} = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right).$$

- (d) Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= -\mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{U}) = - \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (e) Die zur Maximumnorm konsistente Matrixnorm ist die Zeilensummennorm.

Damit lautet die *à priori*-Abschätzung

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^*\|_\infty &\leq \frac{\|\mathbf{M}\|_R^n}{1 - \|\mathbf{M}\|_R} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = \\ &= \frac{(3/4)^n}{1 - 3/4} \cdot \frac{3}{2} = 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n.\end{aligned}$$

$\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq 10^{-3}$ ist sicher erfüllt, wenn gilt

$$6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 10^{-3}.$$

Auflösen nach n liefert mit den angegebenen Näherungen

$$n \geq \frac{3 + \lg(3) + \lg(2)}{2\lg(2) - \lg(3)} \approx 38.$$

- (f) Die *à priori*-Abschätzung ist sehr konservativ – indem man nach den einzelnen Rechenschritten jeweils eine *à posteriori*-Abschätzung durchführt, die etwas schärfer ist, kann man die gewünschte Genauigkeit des Näherungswerts meist schon nach weniger Rechenschritten bestätigen und die Rechnung beenden.

Aufgabe 2 (Differentialgleichungssysteme – 9 Punkte):

- (a) Die charakteristische Gleichung des Systems lautet

$$\begin{aligned}0 &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \det \begin{pmatrix} 4 + a - \lambda & b \\ -b & a - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (4 + a - \lambda)(a - \lambda) + b^2 = \\ &= \lambda^2 - (4 + 2a)\lambda + a(4 + a) + b^2;\end{aligned}$$

damit erhält man die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = (2 + a) \pm \sqrt{4 - b^2} = \begin{cases} (2 + a) \pm \sqrt{4 - b^2}, & \text{falls } |b| \leq 2; \\ (2 + a) \pm j\sqrt{b^2 - 4}, & \text{falls } |b| > 2. \end{cases}$$

- (b) Schwingungslösungen entstehen, wenn $\text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$ ist, also für $|b| > 2$.
Die Schwingungen sind gedämpft, wenn zudem $a + 2 < 0$ ist, also für $a < -2$.

- (c) Eine komplexe Fundamentallösung lautet nach Vorgabe

$$\mathbf{z}(t) = e^{(-1+2j)t} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 + j \end{pmatrix}.$$

Durch Real- und Imaginärteilbildung erhält man zwei reelle Fundamentallösungen:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t) &= e^{-t}(\cos(2t) + j \sin(2t)) \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 + j \end{pmatrix} = \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos(2t) \\ -\cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix} + j e^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin(2t) \\ \cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix};\end{aligned}$$

die allgemeine reelle Lösung lautet damit ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos(2t) \\ -\cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin(2t) \\ \cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Anfangswertprobleme – 12 Punkte):

(a) Das Verfahren ist ein explizites Runge-Kutta-Verfahren dritter Stufe, also kann es maximal die Ordnung 3 besitzen.

(b) Zunächst ist

$$t_1 = t_0 + h = 1 + h.$$

Weiter berechnet man der Reihe nach

$$k_1 = f(t_0, w_0) = f(1, -1) = 1,$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{3}, w_0 + \frac{hk_1}{3}\right) = f\left(1 + \frac{h}{3}, -1 + \frac{h}{3}\right) = 1 - \frac{h^2}{9},$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(t_0 + \frac{2h}{3}, w_0 + \frac{2hk_2}{3}\right) = f\left(1 + \frac{2h}{3}, -1 + \frac{2h}{3}\left(1 - \frac{h^2}{9}\right)\right) = \\ &= -\left(1 + \frac{2h}{3}\right)\left(-1 + \frac{2h}{3} - \frac{2h^3}{27}\right) = 1 - \frac{4h^2}{9} + \frac{2h^3}{27} + \frac{4h^4}{81} \end{aligned}$$

$$w_1 = w_0 + h\left(\frac{k_1}{4} + \frac{3k_3}{4}\right) = -1 + h - \frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{18} + \frac{h^5}{27}.$$

(c) Die MPR ist von 2. Ordnung, also sind die Terme bis h^2 einschließlich sinnvoll.

Mit $t = t_0 + h = 1 + h$ folgt

$$y(t) = -1 + (t - 1) + O((t - 1)^3) = -2 + t + O((t - 1)^3).$$

Aufgabe 4 (Fourierreihen – 10 Punkte):

(a) f ist gerade und hat die Periode π .

(b) $c_k \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{Z}; |c_k| \sim 1/k^2$ (f ist stetig).

(c) Mit $f(t) = \pi \sin(t)$ auf $[0, \pi]$ ist für $k \in \mathbb{Z}$ mit $\omega = 2$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) e^{-2jkt} dt = \int_0^\pi \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} e^{-2jkt} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^\pi \left(e^{j(1-2k)t} - e^{-j(1+2k)t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{e^{j(1-2k)t}}{j(1-2k)} + \frac{e^{-j(1+2k)t}}{j(1+2k)} \right]_0^\pi = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{e^{j(1-2k)\pi} - 1}{1-2k} + \frac{e^{-j(1+2k)\pi} - 1}{1+2k} \right]_0^\pi = \left(e^{j2k\pi} = 1, e^{j\pi} = -1 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{2}{1-2k} - \frac{2}{1+2k} \right) = \frac{2}{1-4k^2} = -\frac{2}{4k^2-1}. \end{aligned}$$

(d) Mit den Ergebnissen von Aufgabenteil (c) ist

$$a_k = 2\operatorname{Re}(c_k) = -\frac{4}{4k^2-1}, \quad b_k = -2\operatorname{Im}(c_k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit erhält man

$$T_2(t) = 2 - \frac{4}{3} \cos(2t) - \frac{4}{15} \cos(4t).$$

Mit „Notnagel“:

$$a_k = 2\operatorname{Re}(c_k) = \frac{2}{2+k^2}, \quad b_k = -2\operatorname{Im}(c_k) = -\frac{2k}{2+k^2}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

und

$$T_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos(2t) - \frac{2}{3} \sin(2t) + \frac{1}{3} \cos(4t) - \frac{2}{3} \sin(4t).$$

Aufgabe 5 (Taylorpolynome – 10+2 Punkte):

(a) Zunächst berechnet man

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-3x)^{-1/3}, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= (1-3x)^{-4/3}, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= 4(1-3x)^{-7/3}, & f''(0) &= 4, \\ f'''(x) &= 28(1-3x)^{-10/3} \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom lautet damit

$$p_2(x) = 1 + x + 2x^2;$$

für das Restglied von Lagrange erhält man

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3 = \frac{14}{3} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1-3\xi}^{10}}, \quad \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } x.$$

(b) Es ist

$$\sqrt[3]{2} = f\left(\frac{1}{6}\right) \approx p_2\left(\frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{6} + \frac{2}{36} = \frac{11}{9}$$

Genauigkeit: Es ist

$$f\left(\frac{1}{6}\right) - p_2\left(\frac{1}{6}\right) = R_2\left(\frac{1}{6}\right),$$

also

$$\sqrt[3]{2} - \frac{11}{9} = \frac{14}{3 \cdot 216} \frac{1}{\sqrt[3]{1-3\xi}^{10}} = \frac{7}{324} \frac{1}{\sqrt[3]{1-3\xi}^{10}}, \quad \xi \in \left[0, \frac{1}{6}\right].$$

Nun Abschätzung:

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{6} \implies 1 \geq \sqrt[3]{1-3\xi} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \implies 1 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1-3\xi}^{10}} \leq 8\sqrt[3]{2}$$

und damit

$$\frac{7}{324} \leq \sqrt[3]{2} - \frac{11}{9} \leq \frac{14\sqrt[3]{2}}{81}.$$

Umformung der rechten Ungleichung liefert jetzt noch

$$\sqrt[3]{2} \cdot \left(1 - \frac{14}{81}\right) \leq \frac{11}{9} \implies \sqrt[3]{2} \leq \frac{11}{9} \cdot \frac{81}{67} = \frac{99}{67}$$

und damit letztlich

$$\frac{403}{324} \leq \sqrt[3]{2} \leq \frac{99}{67}.$$

Umrechnungstabelle:

Maximalpunktzahl: 58 (+2)

Punkte (min.)	53.5	50.5	46.5	43.5	40.5	36.5	33.5	30.5	26.5	23.5	16.5
Note	1.0	1.3	1.7	2.0	2.3	2.7	3.0	3.3	3.7	4.0	4.7