RMM – SS 2018 – Kurzlösungen

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme – 17 Punkte):

(a) $a_{23} = 2 \quad \wedge \quad a_{33} > 4/7$

(b) $|a_{23}| < 6 \quad \wedge \quad |a_{33}| > 3$

(c) $\boldsymbol{x}^{(1)} \;=\; \left(1\,,\, \frac{1}{2}\,,\, 1\right)$

(d) $\mathbf{M} = -\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

(e) Zeilensummennorm für die Matrix und Maximumnorm für Vektoren ergibt

$$\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \;\leqslant\; 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Daraus $n = 38$

(f) Die *à priori*-Abschätzung ist sehr konservativ – indem man nach den einzelnen Rechenschritten jeweils eine *à posteriori*-Abschätzung durchführt, die etwas schärfer ist, kann man die gewünschte Genauigkeit des Näherungswerts meist schon nach weniger Rechenschritten bestätigen und die Rechnung beenden.

Aufgabe 2 (Differentialgleichungssysteme – 9 Punkte):

(a) $\lambda_{1,2} \;=\; \begin{cases} (2+a) \pm \sqrt{4-b^2}\,, & \text{falls } |b| \leqslant 2 \\ (2+a) \pm j\sqrt{b^2-4}\,, & \text{falls } |b| > 2 \end{cases}$

(b) $a < -2 \;\wedge\; |b| > 2$

(c) $\boldsymbol{x}(t) \;=\; C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(2t) \\ -\cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix} \;+\; C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin(2t) \\ \cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix}\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3 (Anfangswertprobleme – 12 Punkte):

(a) Explizites Runge-Kutta-Verfahren dritter Stufe, also maximal Ordnung 3.

(b) $t_1 = 1 + h\,, \quad w_1 = -1 + h - \frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{18} + \frac{h^5}{27}$

(c) Terme bis zur Ordnung h^2 einschließlich sind sinnvoll; also $y(t) = -2 + t + O\big((t-1)^3\big)$

Aufgabe 4 (Fourierreihen – 10 Punkte):

(a) f ist gerade und hat die Periode π

(b) $c_k \in \mathbb{R}\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$; $\quad |c_k| \sim 1/k^2$ (f ist stetig)

(c) $c_k = -\dfrac{2}{4k^2-1} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$

(d) $T_2(t) = 2 - \frac{4}{3}\cos(2t) - \frac{4}{15}\cos(4t)$

Aufgabe 5 (Taylorpolynome – 10+2 Punkte):

(a) $p_2(x) = 1 + x + 2\,x^2\,, \qquad R_2(x) = \dfrac{14}{3}\,\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{1-3\xi}^{\,10}}\,, \quad \xi$ zwischen 0 und x

(b) $\sqrt[3]{2} = f\big(\frac{1}{6}\big) \approx p_2\big(\frac{1}{6}\big) = \frac{11}{9}$

$f\big(\frac{1}{6}\big) - p_2\big(\frac{1}{6}\big) = R_2\big(\frac{1}{6}\big),$ Restgliedabschätzung liefert $\frac{403}{324} \leqslant \sqrt[3]{2} \leqslant \frac{99}{67}$