

HOCHSCHULE ESSLINGEN

Sommersemester 2018	Blatt 1 von 3
Studiengänge: RMM Masterstudiengang	Sem. 1 und Wiederholer
Prüfungsfach: Modellbildung und Simulation	Fachnummern: 1181007
Hilfsmittel: Literatur, Manuskript; keine Taschenrechner oder andere elektronische Hilfsmittel	Zeit: 90 min
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!	

Gesamtpunktzahl: 58 (+2)

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme – 17 Punkte):

Gegeben sind die Matrix $\mathbf{A}$ und die Vektoren $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & a_{23} \\ 1 & 2 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

darin sind $a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$. Betrachtet wird das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- (a) Unter welchen Bedingungen an a_{23}, a_{33} kann man garantieren, daß das Verfahren des steilsten Abstiegs zur iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems konvergiert?
- (b) Unter welchen Bedingungen an a_{23}, a_{33} kann man garantieren, daß das Jacobi-Verfahren zur iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems konvergiert?

Im folgenden ist $a_{23} = -2, a_{33} = 4$.

- (c) Führen Sie, ausgehend von $\mathbf{x}^{(0)}$ einen Schritt des Jacobi-Verfahrens durch, um einen Näherungswert $\mathbf{x}^{(1)}$ für die exakte Lösung $\mathbf{x}^*$ des linearen Gleichungssystems zu berechnen.
- (d) Berechnen Sie die Iterationsmatrix $\mathbf{M}$ des Jacobi-Verfahrens.
- (e) Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten *à priori*-Abschätzung die Anzahl der Iterationsschritte, die *höchstens* erforderlich sind, um einen Näherungswert für $\mathbf{x}^*$ zu bestimmen, für den gilt $\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq 10^{-3}$.

Hinweise:

- Falls Sie $\mathbf{M}$ nicht berechnen konnten verwenden Sie für die Matrixnorm den Wert $3/4$. Geben Sie aber trotzdem an, *welche* Matrixnorm Sie benötigen.
 - Verwenden Sie die Näherungen $\lg(2) \approx 0.30, \lg(3) \approx 0.50$.
- (f) Um die Genauigkeit $\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq 10^{-5}$ zu erreichen benötigt man auf Basis der *à priori*-Abschätzung höchstens $n = 58$ Iterationsschritte. Was könnte man tun, um evtl. nicht *so* viele Schritte rechnen zu müssen? (Keine Rechnung erforderlich!)

Sommersemester 2018	Blatt 2 von 3
Studiengänge: RMM Masterstudiengang	Sem. 1 und Wiederholer
Prüfungsfach: Modellbildung und Simulation	Fachnummern: 1181007
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!	

Aufgabe 2 (Differentialgleichungssysteme – 9 Punkte):

Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte dieses Systems in Abhängigkeit der Parameter a, b . (*Hinweis*: Fallunterscheidung!)
- (b) Für welche Werte der Parameter a, b besitzt das System gedämpfte Schwingungslösungen?
- (c) Für $a = -3$, $b = 2\sqrt{2}$ lauten ein Eigenwert und ein zugehöriger Eigenvektor der Systemmatrix

$$\lambda = -1 + 2j, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 + j \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie damit die allgemeine reelle Lösung des Systems.

Aufgabe 3 (Anfangswertprobleme – 12 Punkte):

Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = -t \cdot y(t) \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

soll mit dem nebenstehend definierten Runge-Kutta-Verfahren und Schrittweite $h > 0$ gelöst werden.

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{4}$	0 $\frac{3}{4}$

- (a) Welche Ordnung kann dieses Verfahren *maximal* besitzen?
- (b) Bestimmen Sie einen Näherungswert w_1 für den Funktionswert $y(t_1)$ der exakten Lösung. Berechnen Sie auch t_1 in Abhängigkeit von h .
- (c) Mit der Mittelpunkregel erhält man

$$w_1 = -1 + h - \frac{h^3}{4}.$$

Schreiben Sie die Taylorreihe der exakten Lösung $y(t)$ mit Entwicklungspunkt $t_0 = 1$ auf, so weit es mit diesem Näherungswert sinnvoll ist.

Sommersemester 2018	Blatt 3 von 3
Studiengänge: RMM Masterstudiengang	Sem. 1 und Wiederholer
Prüfungsfach: Modellbildung und Simulation	Fachnummern: 1181007
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!	

Aufgabe 4 (Fourierreihen – 10 Punkte):

Betrachtet wird die Funktion

$$f(t) := |\pi \sin(t)|$$

- (a) Welche (Minimal-)Periode und welche Symmetrieeigenschaft besitzt f ?
- (b) Was kann man über die komplexen Fourierkoeffizienten c_k von f *ohne Rechnung* sagen?
- (c) Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten von f .

$$\text{Hinweis: } \sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

- (d) Schreiben Sie das *reelle* Fourierpolynom 2. Grades von f auf.

Notnagel: Falls Sie die c_k in Aufgabenteil (b) nicht berechnet haben, verwenden Sie

$$c_k = \frac{1 + jk}{2 + k^2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dies sind aber *nicht* die Fourierkoeffizienten von f !

Aufgabe 5 (Taylorpolynome – 10+2 Punkte):

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}.$$

- (a) Bestimmen Sie zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ das Taylorpolynom 2. Grades p_2 von f sowie das Restglied R_2 von Lagrange.
- (b) Berechnen Sie mit p_2 einen Näherungswert für $\sqrt[3]{2}$.
- (c) Bestimmen Sie mit den vorigen Aufgabenteilen ein möglichst kleines Intervall $[a, b]$ mit rationalen Zahlen a, b , in dem die Zahl $\sqrt[3]{2}$ liegt.

(*Hinweis:* 2 Bonuspunkte für besonders gute Lösungen.)