RMM – SS 2017 – Kurzlösungen

Aufgabe 1 (Matlab – 6 Punkte):

(a) `A` muß eine quadratische Matrix sein (Ordnung n), `b` ein Spaltenvektor mit n Koordinaten.

Die Function führt ausgehend vom Startwert $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ das Jacobi-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ durch.

Abbruchkriterium: $r_\infty := \|\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_\infty \leqslant 10^{-8}$.

Rückgabewerte sind die Näherungslösung `x` und das Residuum r_∞.

(b) Falls die Dimensionen der Eingabegrößen $\mathbf{A}$ und $\boldsymbol{b}$ inkonsistent sind, dann bricht die Function mit einer Fehlermeldung ab; genauso wenn ein Diagonalelement von $\mathbf{A}$ Null ist.

Wenn $\mathbf{A}$ nicht strikt diagonaldominant ist, dann kann es passieren, daß das Jacobi-Verfahren nicht konvergiert. In diesem Fall läuft die Function in eine Endlosschleife oder bricht aufgrund einer Überschreitung des darstellbaren Zahlenbereichs (für die Koordinaten von `x`) ab.

Aufgabe 2 (Differentialgleichungssysteme – 16 Punkte):

(a) Eigenwerte berechnen $\Rightarrow$ System ist asymptotisch stabil, d.h. $\boldsymbol{x}(t) \to \mathbf{0}$ für $t \to \infty$.

(b) Allgemeine reelle Lösung ($A, B, C \in \mathbb{R}$):

$$\boldsymbol{x}(t) \;=\; Ae^{-3t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + Be^{-3t}\begin{pmatrix}0\\-\sin(2t)\\\cos(2t)\end{pmatrix} + Ce^{-3t}\begin{pmatrix}0\\\cos(2t)\\\sin(2t)\end{pmatrix}$$

(c) Lösung des Anfangswertproblems:

$$\boldsymbol{x}(t) \;=\; 4e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 10e^{-3t}\begin{pmatrix}0\\-\sin(2t)\\\cos(2t)\end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (Verfahren des steilsten Abstiegs – 17 Punkte):

(a) $a = -2,\;\; c > \dfrac{p^2}{2},\;\; p = q\,,\;\; p \in \mathbb{R}$ beliebig

(b) $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix}11\\0\\13/3\end{pmatrix}$

(c) Nein – denn die Näherungslösungen konvergieren zumindest für $c > 1/2$ gegen $\boldsymbol{x}^*$, und $\boldsymbol{x}^*$ hängt von c ab.

Für $c \gg 1$ ist

$$\boldsymbol{x}^* \approx \begin{pmatrix}11\\0\\9/2\end{pmatrix}, \qquad \|\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \approx 10\,, \qquad \|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \approx \frac{1}{6}\,,$$

also ist $\quad \|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty < \|\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty$.

Aufgabe 4 (Reihen – 9 Punkte):

(a) $f(x) \;=\; \left(\frac{3}{2}+1\right) \;+\; \left(\frac{3}{4}-1\right)(x-1) \;+\; \left(\frac{3}{8}+1\right)(x-1)^2 \;+\; \left(\frac{3}{16}-1\right)(x-1)^3 \;+\dots$

Allgemeiner Term: $\quad a_n(x-b)^n \;=\; \left(\frac{3}{2^{n+1}}+(-1)^n\right)(x-1)^n$

(b) $I=(0,2)$

Aufgabe 5 (Fourierreihen – 11 Punkte):

(a) $b_k=0,\; c_k\in\mathbb{R},\;\; a_k,c_k\sim 1/k^2$ (jeweils für alle k)

(b) $c_k=\dfrac{(-1)^k}{\pi(1+k^2)}\sinh(\pi)\,,\qquad k\in\mathbb{Z}$

(c) $T_3(t)=\dfrac{2\sinh(\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{2}\;-\;\frac{1}{2}\,\cos(t)\;+\;\frac{1}{5}\,\cos(2t)\;-\;\frac{1}{10}\,\cos(3t)\right)$

(d) Geht nicht, denn g entsteht nicht durch einfache Verschiebung, Skalierung usw. aus f.

Aufgabe 6 (Anfangswertprobleme – 16 Punkte):

(a) 3. Stufe; die maximal mögliche Ordnung ist 3.

(b) Die Taylorpolynome der exakten Lösung $y(t)=e^{-t}$ an der Stelle $t_1=h$ und der Näherungslösung w_1 müssen bis zum Term der Ordnung h^3 einschließlich übereinstimmen. Daraus

$$c=\frac{5}{12}\,,\quad b=\frac{2}{5}\,.$$

Damit ist *noch nicht* klar, ob das Verfahren die Ordnung 3 hat – denn dazu muß der lokale Diskretisierungsfehler für *beliebige* AWPe (mit hinlänglich glatter rechter Seite f der DGl) die Ordnung $\geqslant 4$ besitzen.

(c) Für die Näherungslösung w_n zum Zeitpunkt $t_n=nh$ gilt

$$w_n \;=\; \left(1-h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{2}\right)^n \;=:\; C(h)^n\,,\qquad n\in\mathbb{N}_0\,.$$

Qualitativ richtig verhält sich die Näherungslösung, wenn $\{w_n\}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Dies ist (für positive Schrittweiten h gemäß Aufgabe) der Fall für $h\in(0,1]$.