HOCHSCHULE ESSLINGEN

Sommersemester 2017		Blatt 1 von 4
Studiengänge:	RMM Masterstudiengang	Sem. 1 und Wiederholer
Prüfungsfach:	Modellbildung und Simulation	Fachnummern: 1181007
Hilfsmittel:	Literatur, Manuskript; keine Taschenrechner oder andere elektronische Hilfsmittel	Zeit: 120 min
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!		

Gesamtpunktzahl: 76

Aufgabe 1 (Matlab – 6 Punkte):

Betrachtet wird die Matlab-Function

```
function [x,res] = was_mache_ich(A,b)
n = length(b);
D = diag(diag(A));
M = -inv(D)*(A-D);
c = inv(D)*b;
x = zeros(n,1);
res = 1;
while res > 1e-8
    x = M*x+c;
    res = norm(A*x-b,Inf);
end
```

(a) Beschreiben Sie stichpunktartig, was die oben stehende Matlab-Function macht. Welche Bedeutung haben die Eingabe-/Rückgabewerte? Welche Form müssen die Eingabewerte haben?

(b) Geben Sie zwei *verschiedenartige* Probleme an, die bei der Ausführung der Function auftreten können.

Aufgabe 2 (Differentialgleichungssysteme – 16 Punkte):

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche Stabilitätseigenschaft hat das System? Was bedeutet das für das Verhalten der Lösungen?

(b) Berechnen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungs-Systems.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 3 (Verfahren des steilsten Abstiegs – 17 Punkte):

Gegeben sind die Matrix $\mathbf{A}$ und die Vektoren $\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{b}$ mit

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & c & p \\ -2 & q & 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

darin sind $a, c, p, q \in \mathbb{R}$. Betrachtet wird das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

(a) Für welche Werte der Parameter a, c, p, q kann man garantieren, daß das Verfahren des steilsten Abstiegs konvergiert ?

(b) Es sei jetzt $a = -2,\ p = q = -1$ und weiterhin $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Führen Sie ausgehend vom Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)}$ einen Schritt des Verfahrens des steilsten Abstiegs durch, um $\boldsymbol{x}^{(1)}$ zu berechnen. Zeigen Sie damit, daß $\boldsymbol{x}^{(1)}$ unabhängig vom Parameter c ist.

(c) Die exakte Lösung des linaren Gleichungssystems aus Aufgabenteil **(b)** lautet

$$\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{22c-4}{2c-1}\,;\ \frac{7}{2c-1}\,;\ \frac{9c-1}{2c-1} \right).$$

1. Begründen Sie, ob auch die weiteren Näherungslösungen $\boldsymbol{x}^{(2)}$, $\boldsymbol{x}^{(3)}$ usw. unabhängig vom Parameter c sein können.
2. Überzeugen Sie sich, daß für $c \gg 1$ die Näherungslösung $\boldsymbol{x}^{(1)}$ bereits besser ist als $\boldsymbol{x}^{(0)}$. Verwenden Sie dazu die Maximumnorm für Vektoren. *Hinweis:* Eine Überschlagsrechnung genügt hier !

Aufgabe 4 (Reihen – 9 Punkte):

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{-2x-3}{x(x-3)}.$$

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Hinweis: Beginnen Sie mit dem Ansatz

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}$$

und bestimmen Sie zunächst die Werte der Konstanten A, B. Verwenden Sie dann die geometrische Reihe.

Geben Sie den allgemeinen Term der Reihe – d.h. den Term der Form $a_n(x-b)^n$ – an.

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall der Taylorreihe aus Aufgabenteil **(a)**.

Sommersemester 2017	Blatt 3 von 4
Studiengänge: RMM Masterstudiengang	Sem. 1 und Wiederholer
Prüfungsfach: Modellbildung und Simulation	Fachnummern: 1181007
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!	

Aufgabe 5 (Fourierreihen – 11 Punkte):

Die Funktion

$$\cosh(t) := \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad t \in [-\pi, \pi)$$

wird periodisch fortgesetzt zu einer $2\pi-$periodischen Funktion f.

(a) Was kann man über die Fourierkoeffizienten a_k, b_k, c_k von f *ohne Rechnung* sagen?

(b) Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_k, $k \in \mathbb{Z}$ von f.

Hinweis: Vereinfachen Sie die entstehenden Formeln mit $\sinh(\pi) = (e^{\pi} - e^{-\pi})/2$.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil **(b)** die reellen Fourierkoeffizienten a_k, b_k und schreiben Sie das reelle Fourierpolynom 3. Grades von f auf.

(d) Kann man die Fourierreihe der Funktion f benutzen, um auf einfache Art die Fourierreihe der Funktion

$$g(t) := \cosh(t), \quad t \in [0, 2\pi) \quad \text{(und } 2\pi-\text{periodisch fortgesetzt)}$$

zu berechnen? Falls ja: Wie lautet das Ergebnis? Falls nein: Warum nicht?

Sommersemester 2017		Blatt 4 von 4
Studiengänge:	RMM Masterstudiengang	Sem. 1 und Wiederholer
Prüfungsfach:	Modellbildung und Simulation	Fachnummern: 1181007
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!		

Aufgabe 6 (Anfangswertprobleme – 16 Punkte):

Nebenstehend ist das Butcher-Tableau eines Prädiktor-Korrektor-Verfahrens dargestellt; b und c sind reelle Parameter.

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & 1 & & \\ 1 & b & b & \\ \hline & c & 1-2c & c \end{array}$$

Betrachtet wird das generische Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{y} \;=\; -y\,, \qquad y(0) = 1 \qquad (*)$$

aus der Vorlesung.

(a) Welche Stufe hat das Verfahren?

Welche Ordnung kann das Verfahren bei geeigneter Wahl von b, c *maximal* besitzen?

(b) Wie müssen b und c gewählt werden, damit der lokale Diskretisierungsfehler des Verfahrens für das AWP $(*)$ von der Ordnung h^4 ist?

Hinweis: Führen Sie einen Schritt mit dem Verfahren durch.

Begründen Sie kurz, ob man dann bereits weiß, daß das entstehende Verfahren die Ordnung 3 besitzt.

(c) Für eine bestimmte Wahl der Parameter b, c gilt für die Näherung w_1 für den Funktionswert $y(t_1)$ der exakten Lösung von $(*)$

$$w_1 \;=\; 1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{2}\,.$$

Wie muß man bei diesem Verfahren die Schrittweite $h > 0$ wählen, damit man für das AWP $(*)$ eine *qualitativ* richtige Näherungslösung für beliebige $t > 0$ erhält?

Hinweis: Eine abklingend oszillierende Näherungslösung gilt *nicht* als qualitativ richtig.