HOCHSCHULE ESSLINGEN

Sommersemester 2016		Blatt 1 von 5
Studiengänge:	RMM Masterstudiengang	Sem. 1 und Wiederholer
Prüfungsfach:	Modellbildung und Simulation	Fachnummern: 1181007
Hilfsmittel:	Literatur, Manuskript; keine Taschenrechner oder andere elektronische Hilfsmittel	Zeit: 120 min
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!		

Gesamtpunktzahl: 74+4

Aufgabe 1 (Anfangswertprobleme / Reihen – 13+4 Punkte):

(a) *Explizit*, da alle Gleichungen nach der gesuchten Größe (w^*, w_{n+1}) aufgelöst sind.

*Einschritt*verfahren, da zur Berechnung von w_{n+1} nur ein Schritt „in die Vergangenheit" (also bis w_n) zurückgegangen wird.

(b) Prädiktorschritt:

$$t^* \;=\; t_0 + \frac{h}{2} \;=\; \frac{1+h}{2}\,,$$

$$w^* \;=\; w_0 + \frac{h}{2}\, f(t_0, w_0) \;=\; 1 - \frac{h}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\,(1+1)} \;=\; 1 - \frac{h}{2}\,.$$

Korrektorschritt:

$$t_1 \;=\; t_0 + h \;=\; \frac{1}{2} + h\,,$$

$$w_1 \;=\; w_0 + h\, f(t^*, w^*) \;=\; 1 + h\, f\big(\frac{1+h}{2}, 1 - \frac{h}{2}\big) \;=$$

$$=\; 1 - h\sqrt{\frac{1+h}{2}\cdot\big(1+1-\frac{h}{2}\big)} \;=\; 1 - h\sqrt{1 + \frac{3h}{4} - \frac{h^2}{4}}\,.$$

(c) Mit der angegebenen Reihe und der Substitution

$$z \;=\; \frac{3h}{2} - h^2$$

erhält man zunächst

$$\sqrt{1 + \frac{3h}{2} - h^2} \;=\; 1 + \frac{1}{2}\big(\frac{3h}{2} - h^2\big) - \frac{1}{8}\big(\frac{3h}{2} - h^2\big)^2 + \ldots$$

Weil die Wurzel in der Formel für w_1 noch mit $h/2$ multipliziert wird muß man diese Reihe nur bis zur Ordnung h^2 einschließlich ausrechnen. Es ergibt sich

$$\sqrt{1 + \frac{3h}{2} - h^2} \;=\; 1 + \frac{3h}{4} - \frac{h^2}{2} - \frac{9h^2}{32} + O(h^3) \;=\; 1 + \frac{3h}{4} - \frac{25h^2}{32} + O(h^3)\,.$$

Damit erhält man schließlich

$$w_1 \;=\; 1 - \frac{h}{2}\Big(1 + \sqrt{1 + \frac{3h}{2} - h^2}\Big) \;=\; 1 - \frac{h}{2}\,\Big(1 + 1 + \frac{3h}{4} - \frac{25h^2}{32} + O(h^3)\Big) \;=$$

$$=\; 1 - h - \frac{3}{8}\,h^2 + \frac{25}{64}\,h^3 + O(h^4)\,.$$

Die angegebene Reihe konvergiert für $|z| < 1$, also muß gelten

$$\left|\frac{3h}{2} - h^2\right| \;<\; 1\,, \quad \text{d.h.} \quad -1 \;<\; h^2 - \frac{3h}{2} \;<\; 1$$

oder

$$0 \;<\; h^2 - \frac{3h}{2} + 1 \;<\; 2$$

Die linke Ungleichung ist für alle $h \in \mathbb{R}$ erfüllt, die rechte Ungleichung ist erfüllt für

$$h^2 - \frac{3h}{2} - 1 < 0\,, \quad \text{also} \quad h < 2\,.$$

(d) Der Entwicklungspunkt der Reihe für $y(t)$ ist $t_0 = 1/2$.

Das Verfahren von Heun ist von 2. Ordnung, also sind die Terme bis h^2 einschließlich sinnvoll.

Mit $t = t_0 + h$, also

$$h \;=\; t - t_0 \;=\; t - 0.5$$

folgt

$$y(t) \;=\; 1 - (t-0.5) - \frac{3}{8}\,(t-0.5)^2 + O\big((t-0.5)^3\big)\,.$$

Aufgabe 2 (Reihen – 16 Punkte):

(a) Zunächst schreibt man

$$f(x) \;=\; e^{-x^2+4x} \;=\; e^{-x^2+4x-4+4} \;=\; e^{4-(x-2)^2} \;=\; e^4 \cdot e^{-(x-2)^2}\,.$$

Jetzt substituiert man $z = -(x-2)^2$ und erhält

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; e^4\Big(1 \;-\; (x-2)^2 \;+\; \frac{1}{2!}\,(x-2)^4 \;-\; \frac{1}{3!}\,(x-2)^6 \;\pm\ldots\Big) \;= \\ &=\; e^4 \;-\; e^4(x-2)^2 \;+\; \frac{e^4}{2!}\,(x-2)^4 \;-\; \frac{e^4}{3!}\,(x-2)^6 \;\pm\ldots \end{aligned}$$

(b) Man erhielte bei der Substitution $z = 1 - 1/x$ keine Potenzreihe mehr, denn x würde im Nenner stehen.

(c) Die Ableitungen von g lauten der Reihe nach

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{1-1/x}\,, & g(1) &= 1\,, \\ g'(x) &= \frac{1}{x^2}\,e^{1-1/x}\,, & g'(1) &= 1\,, \\ g''(x) &= \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right) e^{1-1/x} & g''(1) &= -1\,, \\ g'''(x) &= \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\right) e^{1-1/x}\,, & g'''(1) &= 1\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} p_3(x) \;&=\; g(1) \;+\; g'(1)(x-1) \;+\; \frac{g''(1)}{2!}\,(x-1)^2 \;+\; \frac{g'''(1)}{3!}\,(x-1)^3 \;= \\ &=\; 1 \;+\; (x-1) \;-\; \frac{1}{2}\,(x-1)^2 \;+\; \frac{1}{6}\,(x-1)^3\,. \end{aligned}$$

(d) g besitzt eine Definitionslücke an der Stelle $x = 0$. Da Konvergenzintervalle von Potenzreihen stets symmetrisch um Entwicklungspunkt sind gilt also

$$I \subseteq (0, 2] \,.$$

(e) Es ist

$$1 - \tfrac{1}{x} = \tfrac{1}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \tfrac{3}{2} \in (0, 2]$$

und damit

$$\sqrt[3]{e} \;=\; g\big(\tfrac{3}{2}\big) \,.$$

Damit gilt mit Aufgabenteil **(c)**

$$\sqrt[3]{e} \;=\; g\big(\tfrac{3}{2}\big) \;\approx\; p_3\big(\tfrac{3}{2}\big) \;=\; 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{48} \;=\; \tfrac{67}{48} \,.$$

Aufgabe 3 (Lineare Gleichungssysteme – 14 Punkte):

(a) Für das charakteristische Polynom ergibt sich

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_3) \;=\ldots= \\ &= (a - \lambda) \cdot \Big(\lambda^2 \;-\; (2a{+}1)\lambda \;+\; (a^2{+}a{-}2)\Big) \,. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte ergeben sich daraus zu

$$\lambda_1 \;=\; a \,, \qquad \lambda_2 \;=\; a - 1 \,, \qquad \lambda_3 \;=\; a + 2 \,.$$

(b) $\mathbf{A}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

Dies ist nach Aufgabenteil **(a)** der Fall für $a > 1$.

Alternative mit dem Kriterium von Sylvester:

Es muß gelten $det(\mathbf{A}_1) > 0 \;\wedge\; det(\mathbf{A}_2) > 0 \;\wedge\; det(\mathbf{A}) > 0$, also

$$a > 0 \quad \wedge \quad a^2 + a - 1 > 0 \quad \wedge \quad a(a^2 + a - 2) > 0 \,.$$

Daraus wieder $a > 1$.

(c) Zeilensummenkriterium:

$$|a| > 1 \qquad \wedge \qquad |a + 1| > 2 \qquad \wedge \qquad |a| > 1 \,.$$

Die erste und dritte Bedingung führen auf $a > 1 \;\vee\; a < -1$.

Die zweite Bedingung führt auf $a > 1 \;\vee\; a < -3$.

Insgesamt muß also gelten

$$a > 1 \qquad \vee \qquad a < -3 \,.$$

(d) Da $\mathbf{A}$ zwar strikt diagonaldominant, nicht aber positiv definit ist, sollte das Jacobi- oder das Gauß-Seidel-Verfahren verwendet werden.

Hinweis (SS 2018): Tatsächlich ist die Matrix hier *negativ* definit – das Verfahren des steilsten Abstiegs konvergiert also auch und könnte ebenfalls verwendet werden. In der Vorlesung des SS 2016 hatten wir aber nur positive Definitheit besprochen, deswegen war hier nur das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren anzugeben.

(e) Jetzt ist $\mathbf{A}$ sowohl strikt diagonaldominant als auch positiv definit und symmetrisch. Damit können sowohl das Jacobi-/Gauß-Seidel-Verfahren als auch das Verfahren des steilsten Abstiegs verwendet werden.

Aufgabe 4 (Jacobiverfahren – 16 Punkte):

(a) Mit den angegebenen Daten ist

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \tfrac{1}{4}\Big(8+2-3\Big) &&= \tfrac{7}{4}\,, \\ x_2^{(2)} &= -\tfrac{1}{4}\Big(4-6-0\Big) &&= \tfrac{1}{2}\,, \\ x_3^{(2)} &= \tfrac{1}{2}\Big(-6-0+1\Big) &&= \tfrac{5}{2}\,. \end{aligned} \qquad \text{d.h.} \quad \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= -\mathbf{D}^{-1}\cdot\big(\mathbf{L}+\mathbf{U}\big) = \\ &= -\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/4 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\|\mathbf{M}\|_R = \frac{3}{4}\,, \qquad \|\mathbf{M}\|_C = 1\,.$$

Für die Abschätzungen muß die Matrixnorm von $\mathbf{M}$ kleiner sein als 1.

Also *kann* $\|\mathbf{M}\|_C$ gar nicht verwendet werden, und es bleibt nur $\|\mathbf{M}\|_R$.

(d) Die zur Zeilensummennorm konsistente Vektornorm ist die Maximumnorm.

Damit lautet die *à priori*-Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}^{(n)}-\boldsymbol{x}^*\|_\infty &\leqslant \frac{\|\mathbf{M}\|_R^n}{1-\|\mathbf{M}\|_R}\,\|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \\ &= \frac{(3/4)^n}{1-3/4}\cdot\frac{3}{2} = 6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

(e) $\|\boldsymbol{x}^{(n)}-\boldsymbol{x}^*\|_\infty \leqslant 10^{-3}$ ist sicher erfüllt, wenn gilt

$$6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 10^{-3}\,.$$

Auflösen nach n liefert mit den angegebenen Näherungen

$$n \geqslant \frac{-3-\lg(6)}{\lg(3/4)} = \frac{3+\lg(2)+\lg(3)}{2\lg(2)-\lg(3)} \approx 31.5\,.$$

Auf der sicheren Seite ist man also mit $n = 32$.

Aufgabe 5 (Fourierreihen – 15 Punkte):

(a) f ist gerade, also müssen alle $b_k = 0$ sein.

f ist stetig, also müssen die a_k (mindestens) wie $1/k^2$ zerfallen.

(b) Aus Symmetriegründen gilt (s.o.)

$$b_k \;=\; 0\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Weiter ist allgemein

$$a_k \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(kx)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\cos(kx)\,dx\,.$$

Mit der angegebenen Formel folgt daraus

$$a_0 \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\Big[\sin(x)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} \;=\; \frac{2}{\pi}\,,$$

$$a_1 \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{4}\,\sin(2x) + \frac{x}{2}\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} \;=\; \frac{1}{2}\,,$$

und für $k \geqslant 2$

$$\begin{aligned} a_k \;&=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\cos(kx)\,dx \;= \\ &=\; \frac{1}{\pi}\Big[\frac{k}{k^2-1}\,\cos(x)\sin(kx) - \frac{1}{k^2-1}\,\sin(x)\cos(kx)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} \;= \\ &=\; -\frac{2}{\pi(k^2-1)}\,\cos\big(\tfrac{k\pi}{2}\big) \;= \\ &=\; \begin{cases} 0\,, & k \text{ ungerade,} \\ (-1)^{1+k/2}\,\dfrac{2}{\pi(k^2-1)}, & k \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Mit

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\,, \quad a_1 = \frac{1}{2}\,, \quad a_2 = \frac{2}{3\pi}\,, \quad a_3 = a_5 = 0\,, \quad a_4 = -\frac{2}{15\pi}\,, \quad a_6 = \frac{2}{35\pi}$$

ist

$$T_{f,6}(x) \;=\; \frac{1}{\pi} \;+\; \frac{1}{2}\cos(x) \;+\; \frac{2}{3\pi}\cos(2x) \;-\; \frac{2}{15\pi}\cos(4x) \;+\; \frac{2}{35\pi}\cos(6x).$$

(d) Es ist

$$T_{g,6}(x) \;=\; \pi\, T_{f,6}\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big) - 1$$

also

$$\begin{aligned} T_{g,6}(x) \;=\; &\frac{\pi}{2}\cos\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big) \;+\; \frac{2}{3}\cos\Big(2\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big)\Big) \;- \\ &\qquad -\; \frac{2}{15}\cos\Big(4\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big)\Big) \;+\; \frac{2}{35}\cos\Big(6\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big)\Big) \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} &\cos\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big) = \sin(x)\,, && \cos\Big(2\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big)\Big) = -\cos(2x)\,, \\ &\cos\Big(4\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big)\Big) = \cos(4x)\,, && \cos\Big(6\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big)\Big) = -\cos(6x) \end{aligned}$$

ergibt sich schließlich

$$T_{g,6}(x) \;=\; \frac{\pi}{2}\sin(x) \;-\; \frac{2}{3}\cos(2x) \;-\; \frac{2}{15}\cos(4x) \;-\; \frac{2}{35}\cos(6x)\,.$$