RMM – SS 2016 – Kurzlösungen

Aufgabe 1 (Anfangswertprobleme / Reihen – 13+4 Punkte):

(a) Explizit, da alle vorkommenden Gleichungen jeweils nach der zu berechnenden Größe aufgelöst sind.

Einschrittverfahren, da zur Berechnung von w_{n+1} direkt nur auf w_n, aber nicht auf Werte „weiter in der Vergangenheit“ zurückgegriffen wird.

(b) $t_1 = \frac{1}{2} + h\,, \quad w_1 = 1 - h\sqrt{1 + \frac{3h}{4} - \frac{h^2}{4}}$

(c) $w_1 = 1 - h - \frac{3}{8}h^2 + \frac{25}{64}h^3 + O(h^4)\,, \qquad h < 2$

(d) Entwicklungspunkt ist $t_0 = 0.5$, Terme bis zur Ordnung $(t-0.5)^2$ sind sinnvoll (Heun ist ein Verfahren 2. Ordnung).

$y(t) = 1 - (t-0.5) - \frac{3}{8}(t-0.5)^2 + O\big((t-0.5)^3\big)$

Aufgabe 2 (Reihen – 16 Punkte):

(a) $f(x) = e^4 - e^4(x-2)^2 + \frac{e^4}{2!}(x-2)^4 - \frac{e^4}{3!}(x-2)^6 \pm \ldots$

(b) Bei Substitution $z = 1 - 1/x$ entsteht keine Potenzreihe

(c) $p_3(x) = 1 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3$

(d) $I \subseteq (0, 2]$

(e) $\sqrt[3]{e} \approx \frac{67}{48}$

Aufgabe 3 (Lineare Gleichungssysteme – 14 Punkte):

(a) $\lambda_1 = a,\ \lambda_2 = a - 1\ \ \lambda_2 = a + 2$

(b) $a > 1$

(c) $a > 1$ oder $a < -3$

(d) Jacobi- oder Gauß-Seidel-Verfahren

(e) Jacobi-/Gauß-Seidel-Verfahren oder Verfahren des steilsten Abstiegs

Aufgabe 4 (Jacobiverfahren – 16 Punkte):

(a) $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/4 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\|\mathbf{M}\|_R = \frac{3}{4}, \quad \|\mathbf{M}\|_C \;=\; 1.$ *Nur* $\|\mathbf{M}\|_R$ kann also verwendet werden.

(d) $\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \;\leqslant\; 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(e) $n = 32$

Aufgabe 5 (Fourierreihen – 15 Punkte):

(a) $b_k = 0 \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}\,, \quad a_k$ zerfallen mindestens wie $1/k^2$

(b) $a_0 = \frac{2}{\pi}\,, \quad a_1 = \frac{1}{2}\,, \quad a_k = \begin{cases} 0\,, & k = 3, 5, 7, \ldots \\ (-1)^{1+k/2}\,\dfrac{2}{\pi(k^2-1)}, & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \quad ; \quad b_k = 0 \;\;\forall\, k \in \mathbb{N}$

(c) $T_{f,6}(x) \;=\; \frac{1}{\pi} \,+\, \frac{1}{2}\cos(x) \,+\, \frac{2}{3\pi}\cos(2x) \,-\, \frac{2}{15\pi}\cos(4x) \,+\, \frac{2}{35\pi}\cos(6x)$

(d) $T_{g,6}(x) \;=\; \frac{\pi}{2}\sin\big(x\big) \,-\, \frac{2}{3}\cos(2x) \,-\, \frac{2}{15}\cos(4x) \,-\, \frac{2}{35}\cos(6x)\,.$