

HOCHSCHULE ESSLINGEN

Sommersemester 2016	Blatt 1 von 3
Studiengänge: RMM Masterstudiengang	Sem. 1 und Wiederholer
Prüfungsfach: Modellbildung und Simulation	Fachnummern: 1181007
Hilfsmittel: Literatur, Manuskript; keine Taschenrechner oder andere elektronische Hilfsmittel	Zeit: 120 min
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!	

Gesamtpunktzahl: 74+4

Aufgabe 1 (Anfangswertprobleme / Reihen – 13+4 Punkte):

Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= -\sqrt{t(1+y(t))} \\ y(0.5) &= 1 \end{cases}$$

soll mit der *Mittelpunktsregel* und Schrittweite $h > 0$ gelöst werden.

- (a) Begründen Sie kurz, warum dieses Verfahren ein explizites Einschrittverfahren ist.
- (b) Bestimmen Sie einen Näherungswert w_1 für den Funktionswert $y(t_1)$ der exakten Lösung. Berechnen Sie auch t_1 in Abhängigkeit von h .
- (c) Das *Verfahren von Heun* liefert für $y(t_1)$ den Näherungswert

$$w_1 = 1 - \frac{h}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3h}{2} - h^2} \right).$$

Entwickeln Sie w_1 in eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $h = 0$. Verwenden Sie dazu die Reihe

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \dots \quad \text{für } |z| < 1$$

und schreiben Sie die Terme bis zur Ordnung h^3 einschließlich auf.

Bonusaufgabe: Wie groß darf h maximal gewählt werden, damit Sie mit der angegebenen Reihe arbeiten können?

- (d) Schreiben Sie die Taylorreihe der exakten Lösung $y(t)$ auf, so weit es mit den Ergebnissen der vorigen Aufgabenteile möglich und sinnvoll ist. Überlegen Sie sich dazu zunächst,
- welches der Entwicklungspunkt dieser Reihe ist;
 - was Sie über die Anzahl der sinnvollen Terme wissen.

Sommersemester 2016	Blatt 2 von 3
Studiengänge: RMM Masterstudiengang	Sem. 1 und Wiederholer
Prüfungsfach: Modellbildung und Simulation	Fachnummern: 1181007
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!	

Aufgabe 2 (Reihen – 16 Punkte):

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = e^{-x^2+4x}, \quad g(x) = e^{1-1/x}$$

und die Taylorreihe

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

- Berechnen Sie mit Hilfe von $(*)$ die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ für f .
Hinweis: Quadratische Ergänzung und Substitution.
- Warum kann man *nicht* wie in Aufgabenteil (a) vorgehen, um durch Substitution die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ für g zu bestimmen?
- Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ für g .
- Was kann man *ohne Rechnung* über das Konvergenzintervall der Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ für g sagen? *Hinweis:* Definitionsbereich von g .
- Verwenden Sie das Taylorpolynom aus Aufgabenteil (c), um einen Näherungswert für $\sqrt[3]{e}$ zu bestimmen.

Aufgabe 3 (Lineare Gleichungssysteme – 14 Punkte):

Hinweis: Aufgabenteile (b) bis (e) können unabhängig von (a) gelöst werden.

Gegeben sind die Matrix $\mathbf{A}$ und der Vektor $\mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R}), \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit von a .
- Für welche Werte von a ist $\mathbf{A}$ positiv definit?
- Für welche Werte von a ist $\mathbf{A}$ strikt diagonaldominant?

Gegeben ist jetzt das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- Welche(s) numerische Verfahren aus der Vorlesung könnten Sie zur Lösung dieses LGS verwenden, wenn $a = -5$ ist (kurze Begründung)?
- Welche(s) numerische Verfahren aus der Vorlesung könnten Sie zur Lösung dieses LGS verwenden, wenn $a = 2$ ist (kurze Begründung)?

Sommersemester 2016	Blatt 3 von 3
Studiengänge: RMM Masterstudiengang	Sem. 1 und Wiederholer
Prüfungsfach: Modellbildung und Simulation	Fachnummern: 1181007
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!	

Aufgabe 4 (Jacobiverfahren – 16 Punkte):

Gegeben sind die Matrix $\mathbf{A}$ und die Vektoren $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(0)} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet wird das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- Führen Sie ausgehend von $\mathbf{x}^{(0)}$ einen Schritt des Jacobiverfahrens durch, um einen Näherungswert $\mathbf{x}^{(1)}$ für die exakte Lösung $\mathbf{x}^*$ des linearen Gleichungssystems zu berechnen.
- Berechnen Sie die Iterationsmatrix $\mathbf{M}$ des Jacobiverfahrens.
- Würden Sie für die *à priori*- und *à posteriori*-Abschätzungen lieber die Zeilensummennorm oder die Spaltensummennorm der Matrix $\mathbf{M}$ verwenden? (Kurze Begründung!)
- Wie lautet die *à priori*-Abschätzung für die Matrixnorm $\|\mathbf{M}\|_X$, für die Sie sich in Aufgabenteil (c) entschieden haben?
- Bestimmen Sie die Anzahl der Iterationsschritte, die *höchstens* erforderlich sind, um mit der *à priori*-Abschätzung aus Aufgabenteil (d) einen Näherungswert zu bestimmen, für den gilt $\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^*\|_? \leq 10^{-3}$. Darin bezeichnet $\|\cdot\|_?$ eine geeignete Vektornorm.

Hinweis: Verwenden Sie die Näherungen $\lg(2) \approx 0.30$, $\lg(3) \approx 0.48$.

Aufgabe 5 (Fourierreihen – 15 Punkte):

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \cos(x), & \text{für } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{für } \pi/2 < |x| \leq \pi \end{cases} \quad \text{und } 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

- Welche Eigenschaften der Fourierkoeffizienten a_k, b_k für die Funktion f können Sie *ohne Rechnung* bestimmen? (Hier ist nur eine kurze Begründung verlangt!)
- Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_k, b_k . *Hinweis:*

$$\int \cos(x) \cos(kx) dx = \begin{cases} \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{x}{2} + C & \text{für } k = 1; \\ \frac{k}{k^2-1} \cos(x) \sin(kx) - \frac{1}{k^2-1} \sin(x) \cos(kx) + C & \text{für } k \geq 2. \end{cases}$$

- Schreiben Sie das Fourierpolynom 6. Grades von f auf.
- Berechnen Sie das Fourierpolynom 6. Grades der Funktion $g(x) := \pi f(x - \frac{\pi}{2}) - 1$,