Karlsruhe Institute of Technology

Leibniz Universität Hannover

MINT-KOLLEG BADEN-WÜRTTEMBERG

MATeX

Aufgaben- und Lösungsgenerator für Höhere Mathematik in MATLAB-Umgebung mit LaTeX-Ausgabe

Andreas Helfrich-Schkarbanenko[1], Kevin Rapedius[1], Vita Rutka[1], Aron Sommer[2]

[1] MINT-Kolleg Baden-Württemberg am Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Adenauerring 2, 76131 Karlsruhe

[2] Leibniz Universität Hannover, Institut für Informationsverarbeitung, Appelstr. 9A, 30167 Hannover

MATLAB EXPO 2016, May 10, 2016, Munich, GERMANY

MathWorks

Zusammenfassung

Diese Ausarbeitung richtet sich primär an Mathematik-Dozenten an Hochschuleinrichtungen, die für die Übungsblatterstellung LaTeX einsetzen und sich in einer Programmiersprache, insbesondere MATLAB auskennen. Wir zeigen, wie man MATLAB einsetzen kann, um mit wenigen Vorgaben für ein ausgewähltes mathematisches Thema eine vollständige Aufgabenstellung sowie Lösung sammt Abbildungen in Latex zu generieren. Wir setzen insbesondere die Symbolic Math Toolbox von MATLAB zum automatischen Lösen von Aufgaben ein. Darüber hinaus setzen wir Systembefehle zum Kompilieren von Latex-Dateien und zum anschließendem Betrachten in einem PDF-Reader. Die Leistungsfähigkeit des Vorgehens wird an mehreren Themen der Höheren Mathematik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) vorgeführt. Mit dem vorgestellten Aufgabengenerator reduziert sich der Aufwand pro Aufgabe von 1-2 Stunden auf 1-2 Minuten. Das Ziel ist eine Abdeckung sämtlicher Standardthemen, für die sich eine generische Aufgabenstellung anbietet.

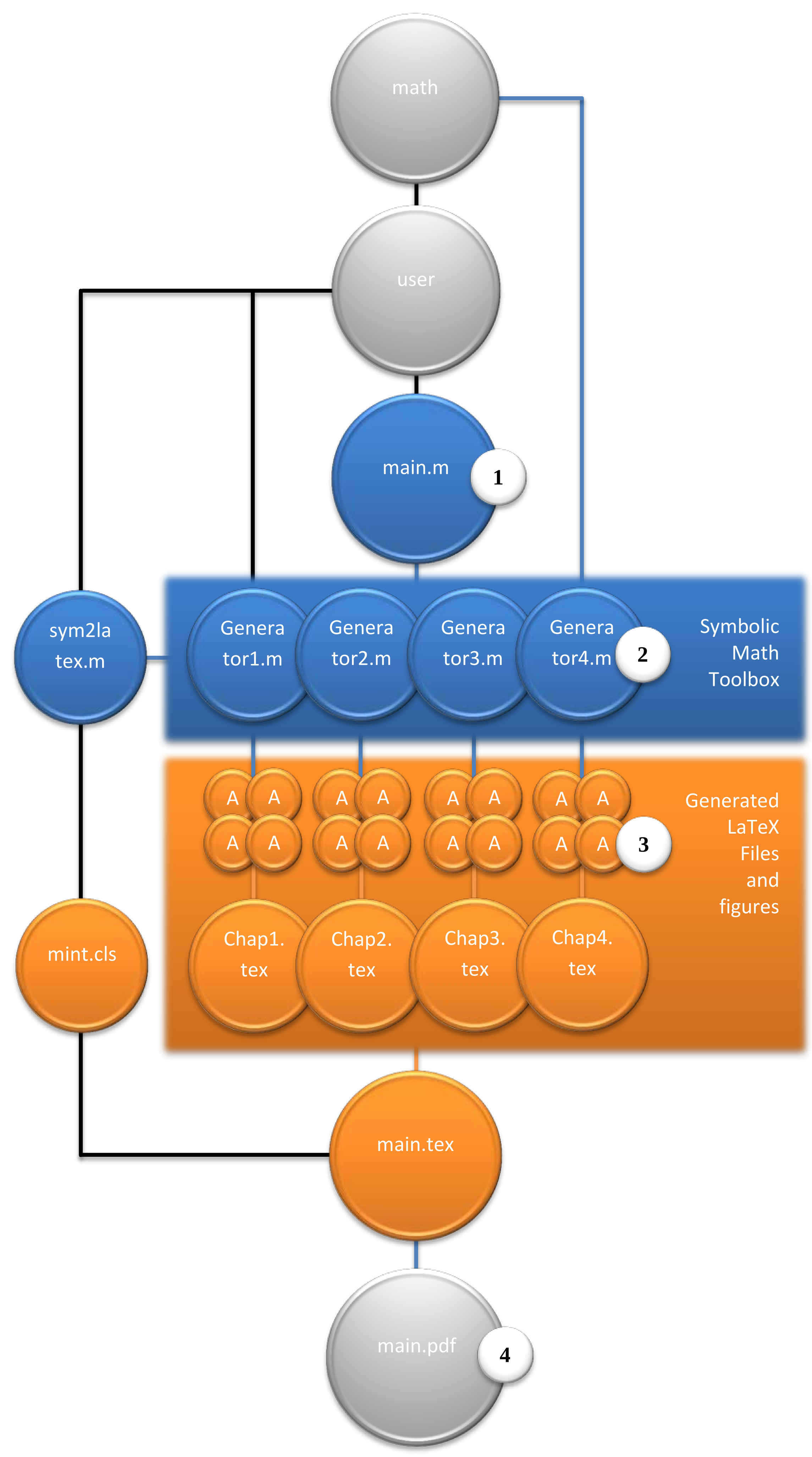
1. Hauptprogramm

```
...
ChapNr   = 3;     AufgNr   = 1;
ChapName = ['Chapter-',num2str(ChapNr)];
AfgName  = ['Ag_Taylor_',num2str(ChapNr),'_',num2str(AufgNr)];
fID2     = fopen([ChapName,'.tex'],'r+');
switch ChapNr
    %...
    case 2
        GeneratorChap2(AfgName,AfgNr)
    %...
end
apend_content(fID2,['\input{',AfgName,'.tex} \clearpage \n ']);
system(['pdflatex.exe ','Aufgabengenerator.tex']);
winopen('Aufgabengenerator.pdf');
```

2. Generator-Funktion

```
function GeneratorChap2(AfgName,AfgNr)
fID      = fopen([AfgName,'.tex'],'wt');
syms x; syms y;
switch AfgNr
   %...
   case 2
       f(x,y) = (x+y)^2-2*x + 3*y +7;  x0=1;   y0=-2; delta=2;
   %...
end
xl=x0-delta; xr=x0+delta; yu=y0-delta; yo=y0+delta;

apend_content(fID,['\begin{MAufgabe}{Satz \"uber ... }{}\n ',...
   'Eine Kurve in $\mathbb R^2$ ist durch die Gleichung ',...
   '$f(x,y)=',sym2latex(char(f),0),'=0$ implizit ... \n ',...
   '\begin{enumerate}\n',...
   '  \item Pr\"ufen Sie nach, ob ... ',...
   '$(x_0,y_0)^\top=(',num2str(x0),',',num2str(y0),')^\top$',...
   '  ... \n', ...
   '\end{enumerate}\n '...
   '\includegraphics{',char(['Abb_zur_',AfgName,'.png']),'}']);

apend_content(fID,['\ifLsg\Loesung\n ',...
   '\begin{enumerate}\n ',...
   '  \item ']);
dfdx = diff(f,x);
dfdy = diff(f,y);
if f(x0,y0)==0
   if dfdy(x0,y0)~=0
      Text=['Da $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=',...
         num2str(eval(dfdy(x0,y0))),'\neq 0$, ist ... \n '];
   else
      Text=['Der Satz f\"ur ... Funktionen ist in ',...
         '$(x_0,y_0)^\top=\left(',num2str(x0),',',num2str(y0),...
         '\right)^\top$ nicht anwendbar, da ... \n '];
   end
else
   Text=['Der vorgegebene Punkt $(x_0,y_0)$ ... nicht ...\n '];
end
apend_content(fID,Text); clear Text;

GeneratePlot(xl,xr,yu,yo,f,AfgName)

%...
apend_content(fID,['\item Die Jacobi-Matrix ist:\n ',...
   ' $$\frac{\partial f}{\partial (x,y)}\ =\ ',...
   ' \left(',sym2latex(char(dfdx),0),',\ ',...
   sym2latex(char(dfdy),0),'\right).$$\n ',...
   ' Die ... $x_0=',num2str(x0),'$ ... \n ',...
   ' \begin{align*}\n ',...
   '  g''(x_0)& = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}',...
   '  &=-\frac{1}{',sym2latex(char(dfdy),1),'}\cdot',...
   '   (',sym2latex(char(dfdx),1),')\\ \n ',...
   '  &=',num2str(double(-(1/eval(dfdy(x0,y0)))*dfdx(x0,y0))),...
   ' \end{align*}\n ',...
   '\end{enumerate}\n \n ']);

apend_content(fID,['\else\relax\fi\n \end{MAufgabe}']);
```

MATeX-Struktur



Danksagung

Das MINT-Kolleg Baden-Württemberg wird durch das Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg (MWK) aus dem Programm Studienmodelle individueller Geschwindigkeit gefördert sowie im Rahmen des Bund-Länder-Programms Bessere Studienbedingungen und mehr Qualität in der Lehre (Qualitätspakt Lehre) des Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) als Verbundprojekt (Förderkennzeichen: 01PL11018A) mit der Universität Stuttgart. Die Autoren danken den Förderern MWK und BMBF für die finanzielle Unterstützung.

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Baden-Württemberg

MINISTERIUM FÜR WISSENSCHAFT, FORSCHUNG UND KUNST

3. Generierte LaTeX-Datei

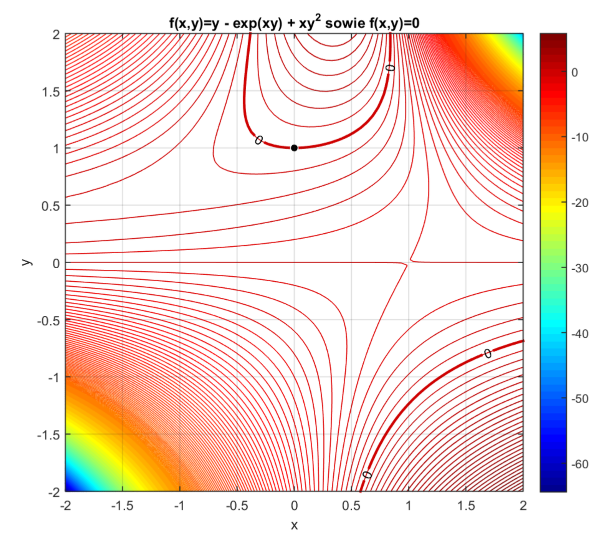
```
\begin{MAufgabe}{Satz \"uber implizit definierte Funktionen}
Eine Kurve in $\mathbb R^2$ ist durch die Gleichung
$f(x,y)=y - \exp(xy) + xy^2=0$ implizit gegeben, siehe Abbildung.
\begin{enumerate}
  \item Pr\"ufen Sie nach, ob in einer Umgebung von
  $(x_0,y_0)^\top=(0,1)^\top$ die implizit definierte Kurve
  durch eine stetig differenzierbare Funktion $g(x)$ darstellbar
  ist, d.h. $f(x,y)=0 \equiv y=g(x)$.
  \item Bestimmen Sie gegebenenfalls dann $g'(x)$ im Punkt
  $(x_0,y_0)^\top=(0,1)^\top$.
\end{enumerate}
\begin{center}
  \includegraphics[width=0.75\linewidth]{Bilder/
  Abbildung_zur_Aufgabe-2-4.png}
\end{center}

\ifLsg\Loesung
\begin{enumerate}
  \item Der vorgegebene Punkt $(x_0,y_0)$ gen\"ugt der Bedingung
     $f(x_0,y_0)=0$, d.h. der Punkt liegt auf der implizit
     definierten Kurve. Da $\frac{\partial f}{\partial y}
     (x_0,y_0)=1\neq 0$, ist der Satz \"uber die implizit
     definierte Funktionen anwendbar.
  \item Die Jacobi-Matrix ist:
     $$\frac{\partial f}{\partial (x,y)}=\left(\frac{\partial f}
     {\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)
     =\left(y^2 - y\exp(xy),\ 2xy - x\exp(xy) + 1\right).$$
     Die gesuchte Ableitung an der Stelle $x_0=0$ mit
     $g(x_0)=y_0$ ist somit:
     \begin{align*}
       g'(x_0)&=-\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,g(x_0))
         \right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,g(x_0))\\
         & = -\frac{1}{2x_0g(x_0) - x_0\exp(x_0g(x_0)) + 1}
             \cdot (g(x_0)^2 - g(x_0)\exp(x_0g(x_0)))\\
         & = 0.
    \end{align*}
\end{enumerate}
\else\relax\fi
\end{MAufgabe}
```

4. Ergebnis als PDF

Aufgabe 0.12 (Satz über implizit definierte Funktionen)
Eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ ist durch die Gleichung $f(x,y) = y - \exp(xy) + xy^2 = 0$ implizit gegeben, siehe Abbildung.

a) Prüfen Sie nach, ob in einer Umgebung von $(x_0, y_0)^\top = (0,1)^\top$ die implizit definierte Kurve durch eine stetig differenzierbare Funktion $g(x)$ darstellbar ist, d.h. $f(x,y) = 0 \equiv y = g(x)$.

b) Bestimmen Sie gegebenenfalls dann $g'(x)$ im Punkt $(x_0, y_0)^\top = (0,1)^\top$.



Lösung:

a) Der vorgegebene Punkt (x_0, y_0) genügt der Bedingung $f(x_0, y_0) = 0$, d.h. der Punkt liegt auf der implizit definierten Kurve. Da $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1 \neq 0$, ist der Satz über die implizit definierte Funktionen anwendbar.

b) Die Jacobi-Matrix ist:

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(y^2 - y\exp(xy),\ 2xy - x\exp(xy) + 1\right).$$

Die gesuchte Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ mit $g(x_0) = y_0$ ist somit:

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, g(x_0))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, g(x_0)) \\ &= -\frac{1}{2x_0 g(x_0) - x_0\exp(x_0 g(x_0)) + 1} \cdot (g(x_0)^2 - g(x_0)\exp(x_0 g(x_0))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Literatur

[1] S. Feiler, Dokumentation zu mkbwKurseAufgaben.cls, Version 3.1, 2015

[2] MathWorks, Symbolic Math Toolbox^{TM} Users Guide R2015b, 2015.

[3] N. J. Higham, Handbook of Writing for the Mathematical Sciences, 2nd Edition, SIAM, 1998