3 Komplexe Zahlen

3.1 Grundrechenoperationen

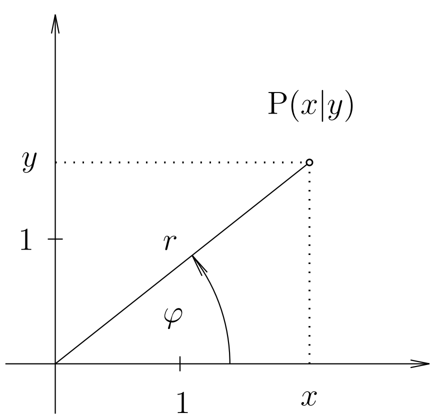
Definition

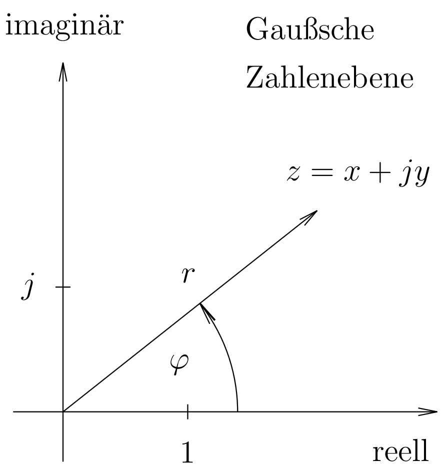
Die Menge $\mathbb{C} = \{z = a + jb \mid a, b \in \mathbb{R};\ j^2 = -1\}$ heißt Menge der komplexen Zahlen;
j heißt imaginäre Einheit. (andere Bezeichnung: i)

Für $b = 0$ erhält man die reellen Zahlen; für $a = 0$ erhält man rein imaginäre Zahlen.

Zur Darstellung der Menge $\mathbb{C}$ fasst man komplexe Zahlen als reelle Zahlenpaare auf, die sich als Vektoren oder als Punkte einer x, y-Ebene darstellen lassen.

Einsvektor in positiver x-Richtung	$\Longleftrightarrow$	Zahl 1
Einsvektor in positiver y-Richtung	$\Longleftrightarrow$	imaginäre Einheit j





<u>Gaußsche Zahlenebene</u>

$P(x\|y)$	$\leftrightarrow$	$z = x + jy = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$	x-Achse	… reelle Achse
$(x\|0)$	$\leftrightarrow$	$z = x$ … reelle Zahlen	y-Achse	… imaginäre Achse
$(0\|y)$	$\leftrightarrow$	$z = jy$ … imaginäre Zahlen	$x = \mathrm{Re}(z)$	… Realteil von z
$(0\|1)$	$\leftrightarrow$	$z = j$ … imaginäre Einheit	$y = \mathrm{Im}(z)$	… Imaginärteil von z

Die x, y-Ebene als Gesamtheit aller komplexen Zahlen z heißt Gaußsche Zahlenebene.

Die Darstellung einer komplexen Zahl z in der Form $z = x + jy$ heißt arithmetische oder kartesische Form.

Verwendet man zur Darstellung des Punktes P Polarkoordinaten $r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$, so ergibt sich die trigonometrische oder Polarkoordinaten-Form der komplexen Zahl z:

$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$ … Betrag der komplexen Zahl z;

$$\varphi = \arg z$$ … Argument (Winkel) von z
$\varphi \in [0,\ 2\pi)$ bzw. $\varphi \in (-\pi,\ \pi]$

© Grenzwert Verlag Version: 1.2 vom 23. April 2008 18:07 Uhr

Zusammenhang zwischen arithmetischer (kartesischer) und trigonometrischer Darstellung:

$$x = r\,\cos\varphi,\;\; y = r\,\sin\varphi; \quad r = \sqrt{x^2+y^2}\;,\;\; \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} \varphi = \arctan\frac{y}{x} & \text{(für } x>0,\text{ Punkt im 1. oder 4. Quadranten)} \\ \varphi = \arctan\frac{y}{x} \pm \pi & \text{(für } x<0,\text{ Punkt im 2. oder 3. Quadranten)} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} & \text{(für } x=0,\ y>0\ ,\text{ Punkt in der oberen Halbebene)} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} & \text{(für } x=0,\ y<0\ ,\text{ Punkt in der unteren Halbebene)} \end{cases}$$

Satz von Euler: $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\,\sin\varphi$

Mit dieser Beziehung geht die trigonometrische Form über in die Exponentialform:

$z = re^{j\varphi}\;; \quad r \geq 0,\;\varphi \in \mathbb{R}$

Rechnen mit komplexen Zahlen

Gleichheit

Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 sind genau dann gleich, wenn ihre Punkte bzw. Vektoren in der Gaußschen Ebene zusammenfallen. Daraus folgt unmittelbar:

$$(x_1 + jy_1) = (x_2 + jy_2) \iff \{x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2\}$$

$$r_1\,e^{j\varphi_1} = r_2\,e^{j\varphi_2} \iff \{r_1 = r_2 \wedge \varphi_1 - \varphi_2 = k\cdot 2\pi\ , k \in \mathbb{Z}\}$$

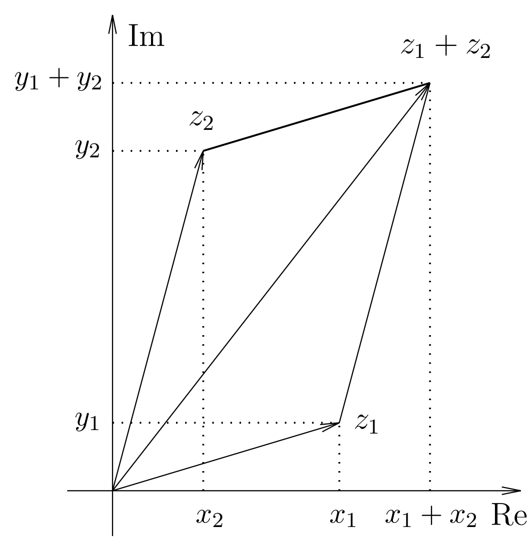
Die letzte Zeile bedeutet: die Beträge müssen übereinstimmen und die Winkel dürfen sich um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden!

Addition, Subtraktion

Die Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen in arithmetischer Form erfolgt komponentenweise.

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) \\ &= (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2) \end{aligned}$$

Geometrische Veranschaulichung:
Die Addition von komplexen Zahlen erfolgt analog zur Addition von Vektoren.



Multiplikation, Division

a) arithmetische Form

Bei der Multiplikation werden die Klammern unter Beachtung von $j^2 = -1$ wie gewohnt ausmultipliziert.

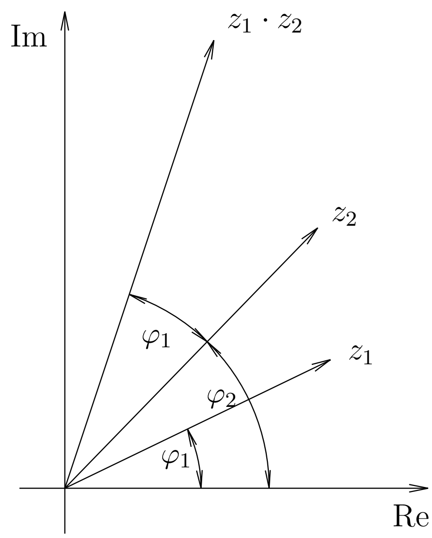
$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$

Bei der Division erweist sich ein Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners („Nenner reell machen“) als hilfreich:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1+jy_1)}{(x_2+jy_2)} = \frac{(x_1+jy_1)(x_2-jy_2)}{(x_2+jy_2)(x_2-jy_2)} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+j(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + j\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\end{aligned}$$

b) Darstellung in Polarkoordinaten

Sind zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 gegeben durch ihre Polarkoordinaten r_1, φ_1, r_2, φ_2, so erhält man das Produkt und den Quotienten am einfachsten in Exponentialform (Potenzgesetze gelten auch für Potenzen mit imaginären Hochzahlen!).



$$z_1 \cdot z_2 = r_1\,\mathrm{e}^{j\varphi_1} \cdot r_2\,\mathrm{e}^{j\varphi_2} = r_1\,r_2\,\mathrm{e}^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Beträge multiplizieren, Argumente (Winkel) addieren

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,\mathrm{e}^{j\varphi_1}}{r_2\,\mathrm{e}^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Beträge dividieren, Argumente (Winkel) subtrahieren

c) Potenzen mit ganzen Hochzahlen

$$z^k = (r\mathrm{e}^{j\varphi})^k = r^k \cdot \mathrm{e}^{jk\varphi} = r^k \cdot (\cos\,\varphi + j\,\sin\,\varphi)^k = r^k \cdot (\cos\,k\varphi + j\,\sin\,k\varphi)\ ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Beträge wie gewohnt potenzieren, Argumente (Winkel) mit dem Exponenten multiplizieren.

Betrag einer komplexen Zahl

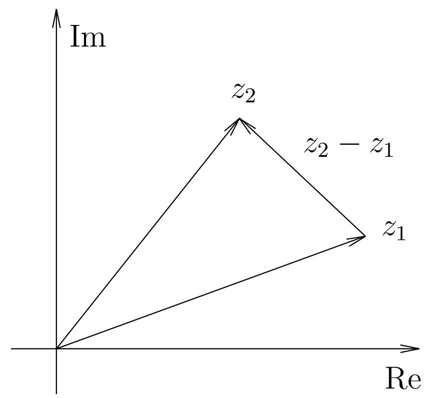
$$\begin{aligned}|z| &= |x+jy| = \sqrt{x^2+y^2} \\ |z| &= |r(\cos\varphi + j\ \sin\varphi)| = r \\ |z| &= |r\ \mathrm{e}^{j\varphi}| = r \qquad \text{insbesonders} \quad |\mathrm{e}^{j\varphi}| = 1\end{aligned}$$

<u>Rechnen mit Beträgen</u>

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|\ ; \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$$

$$\left.\begin{aligned}|z_1 \pm z_2| &\le |z_1| + |z_2| \\ |z_1 \pm z_2| &\ge ||z_1| - |z_2||\end{aligned}\right\} \quad \text{„Dreiecksungleichung“}$$

Beispiel: $\left|\dfrac{\left(10\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}\right)^2}{(1+j)(2-j)}\right| = \dfrac{\left|10\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}\right|^2}{|1+j|\cdot|2-j|} = \dfrac{10^2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = 10\cdot\sqrt{10}$



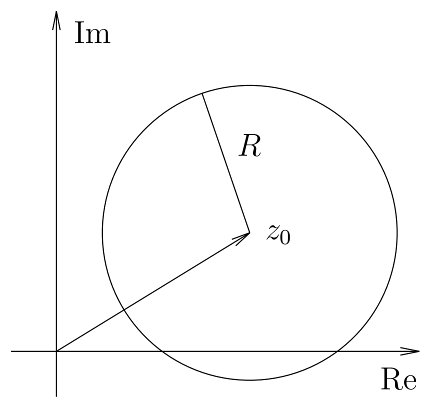
Für die Anwendungen wichtig ist die geometrische Deutung von $|z_2 - z_1|$ als Abstand der beiden Punkte z_1, z_2 in der Gaußschen Ebene.
Diese Eigenschaft des Betrags verwendet man zur Beschreibung von Kreisen bzw. Kreisflächen.

Sei z_0 eine feste komplexe Zahl,
R eine positive Konstante

$$|z - z_0| = R \iff \begin{cases} \text{Kreis um } z_0 \\ \text{mit Radius } R \end{cases}$$

$$|z - z_0| < R \iff \begin{cases} \text{Inneres des Kreises} \\ \text{um } z_0 \text{ mit Radius } R \end{cases}$$

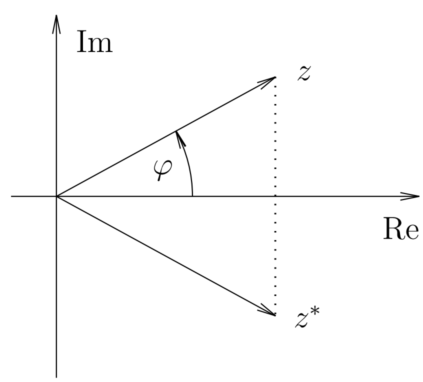
$$|z - z_0| > R \iff \begin{cases} \text{Äußeres des Kreises} \\ \text{um } z_0 \text{ mit Radius } R \end{cases}$$



Konjugiert komplexe Zahlen

Spiegelt man eine komplexe Zahl z an der reellen Achse, so erhält man ihre konjugiert komplexe Zahl z^*. Ein Paar konjugiert komplexer Zahlen z, z^* hat in arithmetischer Darstellung die Form
$z = x + jy, \quad z^* = x - jy$
In Exponentialform ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} z &= r\,e^{j\varphi} \\ z^* &= r\,e^{-j\varphi} \end{aligned}\right\} \text{ d. h. } \quad \begin{aligned} |z| = |z^*|\,; \\ \arg\ z^* = -\arg\ z \end{aligned}$$



$$\mathrm{Re}(z) = \tfrac{1}{2}(z + z^*)\,; \qquad \mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2j}(z - z^*) = -\tfrac{j}{2}(z - z^*)\,; \qquad |z| = \sqrt{z \cdot z^*}\,.$$

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*; \qquad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*; \qquad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}\,.$$

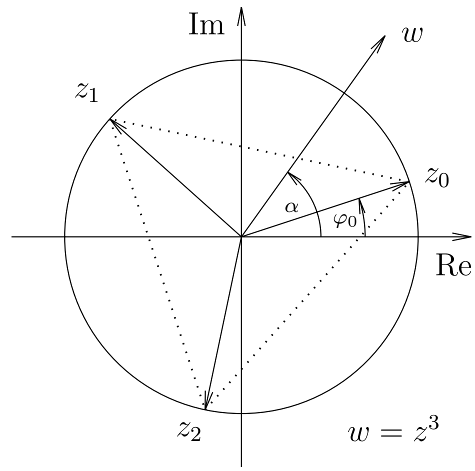
3.2 Nullstellen

Wurzeln einer komplexen Zahl

Gesucht sind sämtliche Lösungen z der Gleichung $z^n = w = \rho \cdot \mathrm{e}^{j\alpha}$; $\rho > 0, n \in \mathbb{N}$.
Der Ansatz $z = r \cdot \mathrm{e}^{j\varphi}$ ergibt

$$r = \sqrt[n]{\rho}\,; \quad \varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\,,\; k = 0, 1, \ldots, (n-1)$$

Sämtliche n Lösungen liegen auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r = \sqrt[n]{\rho}$. Sie bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks.
Der erste Zeiger ist um den Winkel $\varphi_0 = \frac{\alpha}{n}$ gegen die reelle Achse gedreht.



Also $\quad z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \mathrm{e}^{j\frac{\alpha + k\cdot 2\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \mathrm{e}^{j\frac{\alpha}{n}} \cdot \mathrm{e}^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{n}}\,;\; k = 0, 1, \ldots, (n-1)$

Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten

Fundamentalsatz der Algebra

Jede ganzrationale Funktion (Polynom) vom Grad n mit komplexen Koeffizienten

$$\tilde{P}_n(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0; \quad c_k \in \mathbb{C},\; c_n \neq 0$$

besitzt in $\mathbb{C}$ genau n (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen.
Sind die Koeffizienten des Polynoms reell

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0; \quad a_k \in \mathbb{R},\; a_n \neq 0$$

so sind die Nullstellen entweder reell oder es treten Paare konjugiert komlexer Nullstellen auf. Auch hier sind mehrfache Nullstellen möglich.

Quadratische Gleichungen $\qquad az^2 + bz + c = 0; \quad a, b, c$ reelle Konstante, $\quad a \neq 0$

In Abhängigkeit vom Vorzeichen der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$, erhält man drei Fälle:

$D > 0: \; z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	zwei verschiedene reelle Lösungen
$D = 0: \; z_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$	zwei zusammenfallende reelle Lösungen (doppelte Lösung)
$D < 0: \; z_{1,2} = \dfrac{-b \pm j\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$	zwei komplexe Lösungen in Form eines Paares konjugiert komplexer Lösungen

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten hat in $\mathbb{C}$ genau zwei Lösungen; die Lösungen sind entweder reell (zwei einfache, oder eine doppelte) oder konjugiert komplex.

Bemerkungen: Sind die Koeffizienten des Polynoms $P_n(z)$ komplex, so gilt die erste Aussage des Fundamentalsatzes genauso: Das Polynom hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen; die Nullstellen sind entweder reell oder komplex (evtl. mehrfach), wobei komplexe Lösungen nicht notwendig als Paare konjugiert komplexer Zahlen auftreten.

3.3 Harmonische Schwingungen

Darstellung harmonischer Schwingungen

reelle Darstellung

Cosinus-Funktion als Grundfunktion:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \begin{cases} A > 0 & \ldots \text{ Amplitude} \\ \omega > 0 & \ldots \text{ Kreisfrequenz;} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \ldots \text{ Schwingungsdauer} \\ \varphi & \ldots \text{ Nullphasenwinkel:} \quad x(0) = A\cos\varphi \end{cases}$$

Sinus-Funktion als Grundfunktion:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \begin{cases} A > 0 & \ldots \text{ Amplitude} \\ \omega > 0 & \ldots \text{ Kreisfrequenz;} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \ldots \text{ Schwingungsdauer} \\ \varphi & \ldots \text{ Nullphasenwinkel:} \quad x(0) = A\sin\varphi \end{cases}$$

Summenform:

$$x(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) \qquad \begin{cases} \omega > 0 & \ldots \text{ Kreisfrequenz;} \\ C_1,\, C_2 & \in \mathbb{R} \end{cases}$$

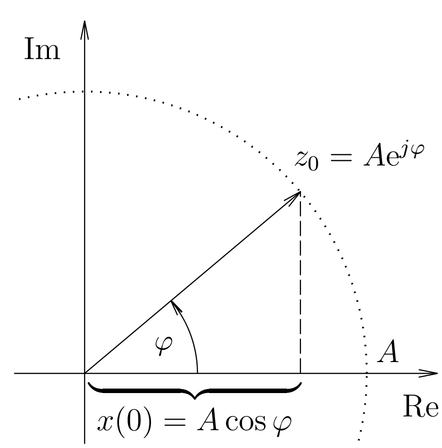
Die Addition von zwei harmonischen Schwingungen gleicher Frequenz ergibt stets wieder eine harmonische Schwingung derselben Frequenz.

Komplexe Darstellung

Einführung komplexer Ersatzgrößen, deren Realteil (oder Imaginärteil) eine harmonische Schwingung beschreibt.

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t + \varphi) \\ &\Updownarrow \\ z(t) &= A\mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi)} = A\cos(\omega t + \varphi) + jA\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(0) &= A\cos(\varphi) \\ &\Updownarrow \\ z(0) &= A\mathrm{e}^{j\varphi} = A\cos(\varphi) + jA\sin(\varphi) \quad \text{„Zeiger“} \end{aligned}}$$



Addition harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \iff z_1(t) = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = A_1 e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t}$$

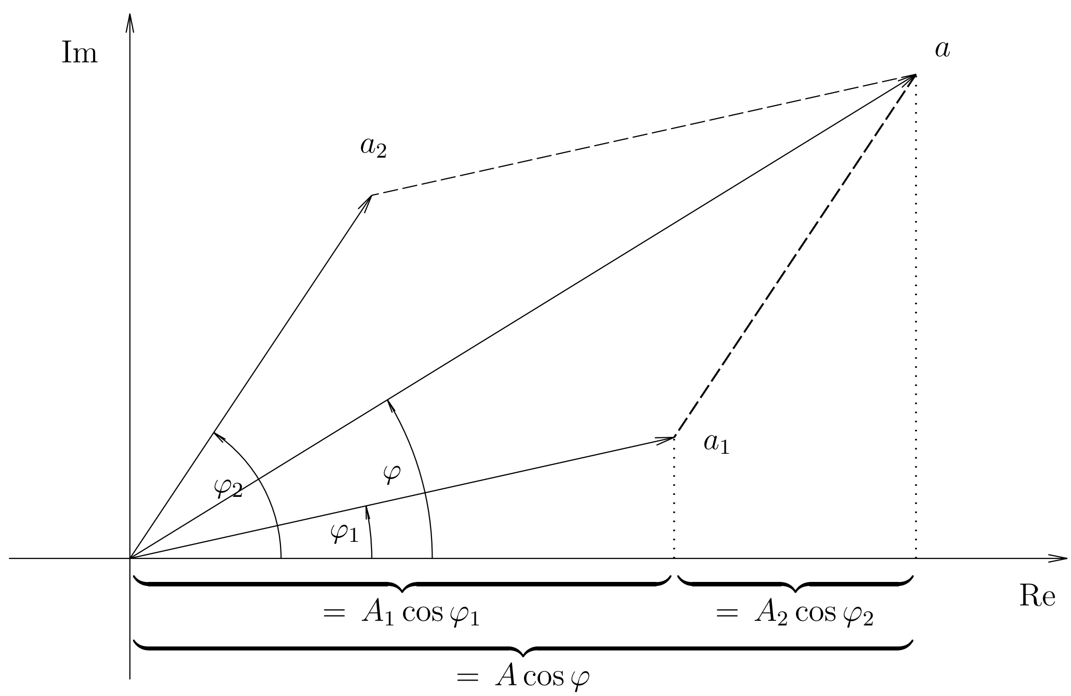
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \iff z_2(t) = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = A_2 e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t}$$

Addition der beiden komplexen Ersatzgrößen liefert

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) = \underbrace{\left(A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2}\right)}_{A\mathrm{e}^{j\varphi}} \cdot e^{j\omega t} = A\mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{reell} & & \text{komplexe Zeiger} \\ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) & = & A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{rcccl} a_1 & = & A_1 \mathrm{e}^{j\varphi_1} & = & z_1(0) \\ a_2 & = & A_2 \mathrm{e}^{j\varphi_2} & = & z_2(0) \end{array} \\ & & \Downarrow \\ x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\,\cos(\omega t + \varphi) & \Leftarrow & a_1 + a_2 = a = A\,\mathrm{e}^{j\varphi} = z(0) \end{array}}$$

- Überführen der Polarkoordinatenschreibweise in kartesische Darstellung
- Addition der Zeiger in arithmetischer Form
- Rückführung in Polarkoordinaten



Beispiel: $x(t) = 2\cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) + 4\cos(\omega t - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow z_1(0) = 2\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{6}}\,,\ z_2(0) = 4\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{3}}$

$$z(0) = z_{10} + z_{20} = 2\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{6}} + 4\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = (\sqrt{3} + 2) + (1 - 2\sqrt{3})j$$

$$A = \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2 + (1-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{20}\,,\ \varphi = \arctan\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) = -0.5835\ldots$$

$$z(t) = \sqrt{20}\mathrm{e}^{j(\omega t - 0.5835\ldots)} \Rightarrow x(t) = \sqrt{20}\cos(\omega tt - 0.5835\ldots)$$

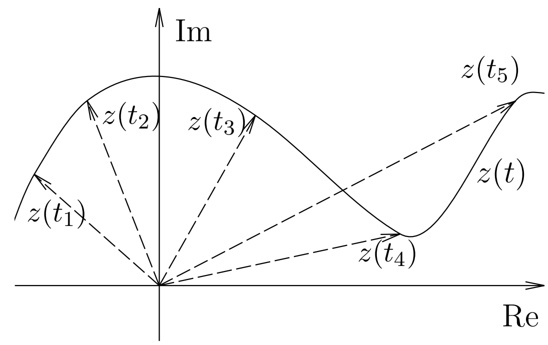
© Grenzwert Verlag Version: 1.2 vom 23. April 2008 18:07 Uhr

3.4 Funktionen

Ortskurven

$z(t) = x(t) + jy(t) = r(t) \cdot e^{j\varphi(t)};\ t \in I \subset \mathbb{R}$

Der geometrische Ort aller Zeigerendpunkte $z(t) \in \mathbb{C}$ bei veränderlichem Parameter t in der Gaußschen Ebene heißt Ortskurve.



Beispiele:

a) $z(t) = z_1 + t \cdot z_2;\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C};\ t \in \mathbb{R}$: Gerade durch z_1 parallel zu z_2

b) $z(t) = z_0 + re^{jt};\ z_0 \in \mathbb{C},\ r > 0,\ 0 \le t \le 2\pi$: Kreis um z_0 mit Radius r

c) $z(t) = \dfrac{1}{z_0 + jt};\ z_0 = x_0 + jy_0,\ t \in \mathbb{R}$

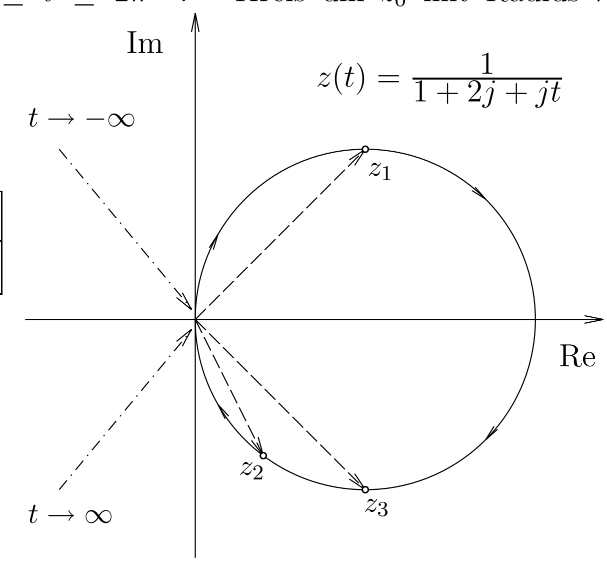
Kreis um $(\frac{1}{2x_0}|0)$ mit Radius $r = \dfrac{1}{2|x_0|}$

t	$\pm\infty$	$-y_0 - x_0$	0	$-y_0 + x_0$
z	0	$z_1 = \frac{1+j}{2x_0}$	$z_2 = \frac{x_0 - jy_0}{x_0^2 + y_0^2}$	$z_3 = \frac{1-j}{2x_0}$

Beispiel:

$z(t) = \dfrac{1}{1 + 2j + jt};\ M(\frac{1}{2}|0),\ r = \frac{1}{2},$

t	$\pm\infty$	-3	0	-1
z	0	$z_1 = \frac{1+j}{2}$	$z_2 = \frac{1-2j}{5}$	$z_3 = \frac{1-j}{2}$

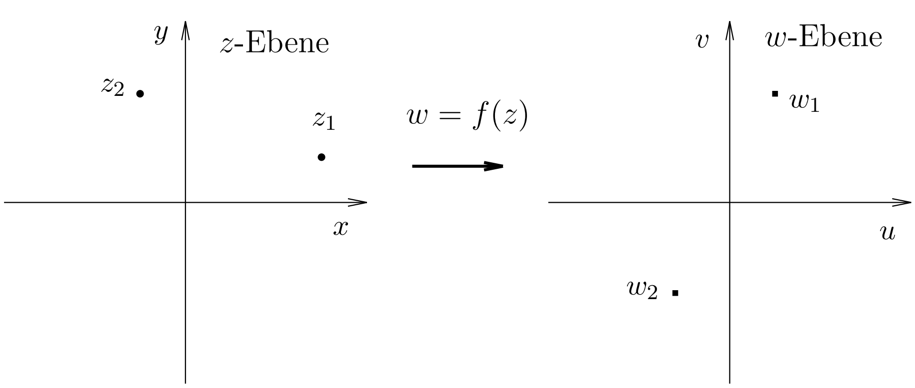


Komplexe Funktionen

Komplexwertige Funktionen einer komplexen Variablen

$w = f(z);\quad z \in D_f \subset \mathbb{C},\quad w \in W_f \subset \mathbb{C}$

lassen sich nicht als Kurven in einer Ebene darstellen. Zu ihrer Veranschaulichung markiert man zugeordnete Punkte in den beiden komplexen Ebenen:



<u>ganze lineare Funktion</u>

$w = f(z) = az + b \qquad a, b \in \mathbb{C}$, konstant

Dabei bedeutet die Multiplikation mit $a = r_a \cdot e^{j\varphi_a}$ eine Drehstreckung mit Drehwinkel φ_a und Streckungsfaktor r_a; die Addition von b bedeutet eine Translation (Verschiebung).

<u>Abbildung durch die Funktion</u> $w = \dfrac{1}{z}$

Exponentialform: $w = \rho \cdot e^{j\alpha} = \dfrac{1}{r \cdot \mathrm{e}^{j\varphi}} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-j\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{1}{r},\ \alpha = -\varphi$

z außerhalb des Einheitskreises	$\Longleftrightarrow$	w innerhalb des Einheitskreises
z oberhalb der reellen Achse	$\Longleftrightarrow$	w unterhalb der reellen Achse
Kreise in z-Ebene	$\Longleftrightarrow$	Kreise in w-Ebene

(Geraden werden als Kreise mit Radius ∞ oder „Kreise durch ∞“ interpretiert)

Einheitskreis bleibt als Ganzes fest; Fixpunkte: $z = \pm 1$

Die Abbildung ist winkeltreu, d. h. Schnittwinkel zwischen Kurven bleiben erhalten.

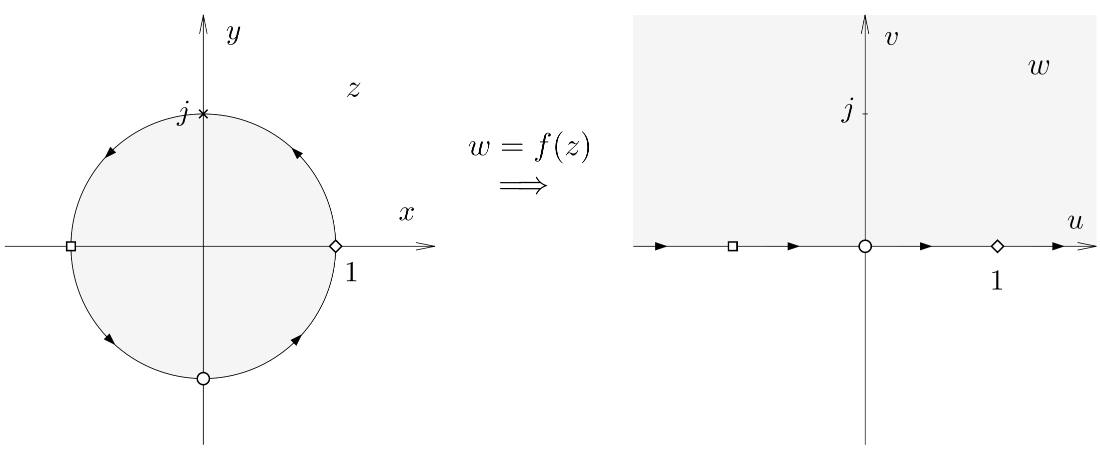
<u>Abbildung durch gebrochen lineare Funktionen</u> $w = \dfrac{az + b}{cz + d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}$, konstant

Durch Polynomdivision zurückführbar auf ganze lineare Abbildungen und $f(z) = \frac{1}{z}$

$w = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc - ad}{c} \cdot \dfrac{1}{cz + d}$

Beispiel: $w = f(z) = \dfrac{z + j}{1 + jz} = -j + \dfrac{2}{z - j}$

z	1	j	-1	-j	0
w	1	∞	-1	0	j



Einheitskreis $\longrightarrow$ reelle Achse

Inneres des Einheitskreises $\longrightarrow$ obere Halbebene