Aufgabensammlung Grundrechenarten

Aufgabe 1 (Bruchrechnen):

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich:

(a) $\frac{2r}{11r} \cdot \frac{55r}{4}$ **(b)** $\frac{27pq}{10q} \cdot \frac{15q}{21p}$ **(c)** $\frac{4x}{3x+6} \cdot \frac{x+2}{2x^2}$

(d) $\frac{3pq-p^2}{q} \cdot \frac{1}{p-3q}$ **(e)** $\frac{4xy}{27z^2} \cdot \frac{9z}{16x^2}$ **(f)** $\frac{2s-5}{12+6s} \cdot \frac{6+3s}{4s^2-25}$

(g) $\frac{a^2-9}{2-3a} \cdot \frac{2a-3a^2}{15+5a}$ **(h)** $\frac{x^2y}{16x-12y} \cdot \frac{16x^2-9y^2}{5x^2y^2}$

Aufgabe 2 (Bruchrechnen):

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich:

(a) $\frac{\left(\frac{z}{9xy}\right)}{\left(\frac{2z^2}{27x^2y}\right)}$ **(b)** $\frac{\left(\frac{7c^2d}{4x^2y}\right)}{\left(\frac{28cd}{12xy^2}\right)}$ **(c)** $\frac{\left(\frac{5a+10b}{9ab}\right)}{\left(\frac{2ab+4b^2}{15a^2b}\right)}$ **(d)** $\frac{\left(\frac{5p^2q}{2p-6q}\right)}{\left(\frac{10pq^2}{p^2-9q^2}\right)}$

Aufgabe 3 (Bruchrechnen):

Bringen Sie auf den Hauptnenner und vereinfachen Sie dann so weit wie möglich:

(a) $\frac{5}{6b} + \frac{2}{3b}$ **(b)** $\frac{a}{2} - \frac{3}{4a}$ **(c)** $\frac{2}{rs} - \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$ **(d)** $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2}{ab}$

(e) $\frac{7}{p} + \frac{4p-7q}{pq}$ **(f)** $\frac{1}{2x} + \frac{x-2y}{4xy}$ **(g)** $\frac{1+mn}{m^2n} - \frac{n+1}{mn}$

(h) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{5} + \frac{7x}{15} - \frac{x}{9}$ **(i)** $\frac{m+2n^2}{7mn^2} - \frac{6+6m}{21m} + \frac{1+12m^2}{42m^2}$

(j) $\frac{b}{a^2+ab} + \frac{a-b}{(a+b)^2}$ **(k)** $\frac{a^2+b^2}{2a^2-2b^2} - \frac{a-b}{4a+4b} + \frac{b+a}{4a-4b}$

(l) $\frac{1+y}{x+y} + \frac{1+x}{x+y} - \frac{2xy}{x^2+y^2+2xy}$ **(m)** $\frac{x}{x+5} + x + 5 - \frac{x^3+16x^2+55x}{x^2+10x+25}$

Aufgabe 4 (Bruchrechnen):

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

(a) $\left(\frac{y}{3x} - \frac{2y}{5x} + \frac{y}{15}\right) \cdot \frac{15x}{y}$ **(b)** $\left(\frac{7}{12ab} + \frac{2a}{3b} - \frac{3b}{4a}\right) \cdot \frac{24a^2b}{11}$

(c) $\frac{\left(\frac{5b^2}{16y} - \frac{25b^2}{12y^2}\right)}{\left(\frac{25b}{6y}\right)}$ **(d)** $\frac{\left(\frac{4m^2}{22p}\right)}{\left(\frac{34m}{55p} \cdot \frac{28m}{51p^2}\right)}$ **(e)** $\frac{\left(\frac{a-2}{a}\right)}{\left(\frac{a^2-4}{4a^3}\right)} \cdot \frac{a+2}{2-a}$

Aufgabe 5 (Bruchrechnen):

Bei optimaler Vereinfachung bleibt eine einzige Variable übrig; welche?

(a) $\left(1+\frac{s^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{r^2-s^2}-\frac{1}{r^2+s^2}\right)-\frac{2}{r^2-s^2}$

(b) $\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}-\frac{bc}{a}\right)^2-\left(\frac{a}{bc}\right)^2\cdot(b+c)^2-\left(\frac{bc}{a}-\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a^2}{b^2}$

(c) $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-\frac{1}{u+v}-\frac{v}{u^2+uv}$

Aufgabe 6 (Bruchgleichungen):

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Lösung:

(a) $\frac{2}{2x+1}=6$ **(b)** $\frac{6y+3}{7-2y}=\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{12}{5}=\frac{2+x}{2x+2}$ **(d)** $\frac{7}{x+3}=\frac{5}{x-3}$

(e) $\frac{-3+4x}{8x-18}=\frac{5x+6}{10x}$ **(f)** $\frac{9x+6}{2x+5}=\frac{9x-5}{2x}$

(g) $\frac{3y+4}{y+4}=5+\frac{5-2y}{y-3}$ **(h)** $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}=0$

(i) $\frac{12}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{11}{x-2}=0$ **(j)** $\frac{x^2-4}{x-5}-\frac{x^2+4}{x+3}=8$

Aufgabe 7 (Binomische Formeln):

Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

(a) $(a-b)^2+(a+b)^2$ **(b)** $(x-y)(x+y)+(x-y)^2$

(c) $(u-3w)^2-(u+3w)^2$ **(d)** $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2$

(e) $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2+(a-b+c)^2-(a-b-c)^2$

(f) $(x-y^3)^2+(x+y^3)^2$ **(g)** $(x^2+5)^2\cdot(5-x^2)$

(h) $(1+x+x^2+x^3)\cdot(x-1)$ **(i)** $(1+x+\ldots+x^n)\cdot(x-1)$

(j) $\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}$ **(k)** $\frac{x^2-y^2}{x+y}+\frac{x^2+y^2}{x-y}$

(l) $\frac{(4r+7s)^5}{(r^2-s^2)^2}:\frac{(4r+7s)^4}{(r-s)^2}$ **(m)** $\left(\sqrt{\frac{1}{6}-z}-\sqrt{z+\frac{1}{6}}\right)^2$

Aufgabe 8 (Binomische Formeln & Co.):

Faktorisieren Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $5x^2+20x-105$ **(b)** $4x^3+28x^2+48x$

(c) $3a(x-y)-2b(x-y)$ **(d)** $6uw-14mw+v(7m-3u)$

(e) $2a(3a+b)-3ab-b^2$ **(f)** $28x^4+28x^2y+7y^2$

Aufgabe 9 (Rechnen mit Wurzeln):

Schreiben Sie folgende Ausdrücke als Potenzen mit rationalem Exponenten ($k, n \in \mathbb{N}$):

(a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{y}}}$ **(b)** $\sqrt[4]{b\sqrt[6]{b^2}}$ **(c)** $\left(\sqrt[n]{p^k}\right)^{2n}$ **(d)** $\sqrt{\sqrt[7]{36(p+q)^8}}$

(e) $\dfrac{\sqrt[n]{p^4}}{\sqrt[n]{p}}$ **(f)** $\dfrac{\sqrt[n]{5^k}}{\sqrt{5^{-k}}}$ **(g)** $\sqrt[6]{u^7\sqrt[3]{u^2v}\sqrt{v}}$ **(h)** $\sqrt{r^{1/2}s^{1/2}\sqrt{st}}$

Aufgabe 10 (Rechnen mit Potenzen):

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $\dfrac{a^{-3}b^6c}{x^{-2}y^{-1}} \cdot \dfrac{x^{-3}y^{-2}}{a^{-4}b^5c^{-1}}$ **(b)** $\dfrac{\left(a^{-3}b\right)^2}{\left(x^2y^3\right)^{-1}} \cdot \dfrac{x^{-1}y^{-2}}{\left(a^{-3}b\right)^{-2}}$ **(c)** $\dfrac{\left(a^2-b^2\right)^{-2}}{(a+b)^{-3}} \cdot \dfrac{(a-b)^2}{a+b}$

(d) $\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^2$ **(e)** $\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-2}$ **(f)** $\dfrac{4^n - 2\cdot 4^{n-1} + 4^{n-2}}{5\cdot 4^{n+1} + 4^{n+2}}$

(g) $\dfrac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ **(h)** $\dfrac{z^{2+n}-z^n}{z^{n+1}+z^n}$ **(i)** $\left(\dfrac{2}{z^2} - \dfrac{1}{z^{-2}}\right)^2$

(j) $\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ **(k)** $\dfrac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{x-y} - \sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Hinweis zu **(j)**: Erweitern mit $\sqrt{n} - \sqrt{n+1}$.

Aufgabe 11 (Rechnen mit Potenzen):

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $\sqrt{\frac{1}{4}x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}xy^3}$ **(b)** $\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$

(c) $2^{-1}\left[\left(\frac{1}{2}a^{-4}+a^4\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a^{-4}-a^4\right)^2\right]$ **(d)** $(r^x)^y \cdot (r^y)^x \cdot \left((r^x)^y + (r^y)^x\right)$

(e) $\left(\sqrt{a^3b}-a\right)^2 - \left(\sqrt{a^5b}+a\right)\cdot\left(\sqrt{ab}+a\right)$ **(f)** $\left(\sqrt{2a}-\sqrt{3b}\right)^2 - \left(\sqrt{3a}-\sqrt{2b}\right)^2$

(g) $\left(\sqrt{a-b}+3\sqrt{a+b}\right)\cdot\left(\sqrt{a-b}-3\sqrt{a+b}\right)$

(h) $\left(\sqrt{\dfrac{2a^2}{b^3}} - \sqrt{\dfrac{2b^3}{a^2}}\right)^2 - \left(b\sqrt{\dfrac{3b}{a^2}} - \dfrac{1}{b}\sqrt{\dfrac{3a^2}{b}}\right)^2$

Aufgabe 12 (Gleichungen mit Potenzen):

Lösen Sie folgende Gleichungen und machen Sie die Probe:

(a) $\sqrt{x}\cdot x^{1/3} = 2$ **(b)** $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x+5}$ **(c)** $\sqrt[8]{x-1} - \sqrt[4]{x-1} = 0$

(d) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x} = 2$ **(e)** $\dfrac{1}{(x-2)^{-1/2}} = 5 - \sqrt{x-3}$

(f) $\frac{1}{3}\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} = 0$ **(g)** $3 \cdot \sqrt[3]{x^2} - x = \frac{2}{x^{-1/3}}$ **(h)** $3\sqrt{3x+1} + 2 = 0$

(i) $\sqrt[4]{1 + \sqrt{x-1}} = \sqrt{2}$ **(j)** $\sqrt[4]{2 \cdot \sqrt{2x+1} + 10} = 2$

Aufgabe 13 (Logarithmen):

Berechnen Sie:

(a) $\log_7 49$ **(b)** $\log_{49} 7$ **(c)** $\log_4 32$ **(d)** $\log_3 \frac{1}{9}$

(e) $\log_4 \sqrt{32}$ **(f)** $\log_2 \left(2\sqrt{2}\right)$ **(g)** $\log_5 \left(25^{1/3}\right)$ **(h)** $\ln\left(\sqrt{e^{2x+4}}\right)$

(i) $\log_{\sqrt[4]{x}} \left(x^4\right)$ **(j)** $\log_a \sqrt[n]{a^m}$ **(k)** $\log_x \left(\frac{1}{x^{-2}}\right)$

Aufgabe 14 (Logarithmen):

Berechnen Sie:

(a) $\log_4 128 + \log_3(9\sqrt{3})$ **(b)** $\log_2 \frac{1}{8} + \log_4 \frac{1}{8} + \log_8 \frac{1}{8}$

(c) $\log_a 5 + \log_a(10a) - \log_a \sqrt{a} - \log_a 50$ **(d)** $\log_2(a^2 + 6a + 9) - \log_2(a+3)$

Aufgabe 15 (Logarithmen):

Bestimmen Sie x:

(a) $\log_2 x = 4$ **(b)** $\log_2(x+20) = 5$ **(c)** $\log_{16} x = \frac{3}{4}$

(d) $\log_x 8 = 3$ **(e)** $\log_x \sqrt{32} = 5$ **(f)** $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{4}$

Aufgabe 16 (Gleichungen mit Potenzen und Logarithmen):

Lösen Sie folgende Gleichungen und machen Sie die Probe:

(a) $6^{2x} - 6^x - 2 = 0$ **(b)** $25^{x+1} - 25^x - 4 = 0$ **(c)** $9^{2x-1/2} \cdot 27^{x+5} = 1$

(d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2x} \cdot 2^{x-1} = \frac{1}{2}$ **(e)** $2^x - 4 \cdot 2^{-x} + 3 = 0$ **(f)** $\lg x - \frac{2}{\lg x} - 1 = 0$

(g) $\left(\frac{1}{25}\right)^x + 5^{1-x} = 6$ **(h)** $\lg(x-2) - \lg(x-4) = 2$

(i) $\lg x + \lg(x+3) = 1$ **(j)** $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$ **(k)** $8 \cdot 4^{-x} - 6 \cdot 2^{-x} + 1 = 0$

(l) $\sqrt{2^x} + \frac{8}{\sqrt{2^x}} = 9$ **(m)** $\lg x + \lg(2x) + \lg(3x) = \lg 6$

(n) Beweisen Sie: Für $a, x > 0$ gilt $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ und $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Literaturhinweise:

Die obigen Beispiele sind (mit leichen Modifikationen) großteils Büchern entnommen, die als Lehrbücher in der Mittelstufe an Gymnasien verwendet werden:

1. **R. Behrens, F. Berger, D. Brandt, H. Eggs, H. Junger, G. Reinelt**:
   Mathematik am Gymnasium, 8. Schuljahr
   Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main, 1995
   ISBN 3-425-97174-3
2. **A. Schmid** (Hrsg.):
   Lambacher-Schweizer 9
   Ernst Klett Verlag Stuttgart, 1. Auflage 1997
   ISBN 3-12-731570-8
3. **W. Schäffler**:
   Zentrale Klassenarbeit
   Stark Verlagsgesellschaft mbH, Freising 1991 - überarbeitete Auflage 1997
   ISBN 3-89449-003-9
4. **Hedwig Mokler**:
   Zentrale Klassenarbeit Baden-Württemberg - Mathematik
   Manz Verlag (Ernst Klett Verlag Stuttgart 1991), 9. Auflage 2000
   ISBN 3-7863-3030-1

zu 1.: Dies ist eines der Standardlehrbücher für den Mathematikunterricht in der 8. Klasse. Behandelt werden u.a. Bruchrechnen und die binomischen Formeln.

zu 2.: Der „Lambacher-Schweizer“ wird in vielen baden-württembergischen Gymnasien eingesetzt. Neben den Lehrbüchern gibt es für jede Klassenstufe ein separates Lösungsheft (für die 9. Klasse ISBN 3-12-731573-2). Im Band für die Klassenstufe 9 werden u.a. quadratische Gleichungen und das Rechnen mit Quadratwurzeln behandelt.

zu 3./4.: Diese beiden Bücher dienen in der 10. Klasse speziell zur Vorbereitung auf die zentrale Klassenarbeit; sie enthalten neben sehr vielen Aufgaben zu verschiedenen Themengebieten der Mittelstufenmathematik jeweils teils ausführliche, teils kurze Lösungen.