Approximation von Funktionen

Fakultät Grundlagen

Februar 2016

Übersicht

1. Approximation
   - Problemstellung
2. Lokale Approximation
   - Taylorpolynom
   - Taylorenreihe
   - Zusammenhang von e-Funktion und trigonometrischen Funktionen
3. Fourieranalysis
   - Trigonometrische Polynome
   - Fourierreihe
   - Trigonometrische Interpolation

Ausgangsproblem

Ein wichtiges Problem der Mathematik ist, eine Funktion durch eine einfachere Näherungsfunktion zu approximieren.
Dabei sind folgende Überlegungen anzustellen:

- Auswahl einer Grundmenge von Näherungsfunktionen. Gebräuchlich sind folgende Funktionenklassen:
  1. Polynome
  2. Splines
  3. Trigonometrische Polynome – für periodische Vorgänge
  4. Exponentialfunktionen
- Festlegung eines messbaren Kriteriums für die Auswahl der „am besten“ geeigneten Funktion aus der vorgegebenen Grundmenge.
  1. Übereinstimmung der Ableitungen
  2. Minimierung des „Abweichungsquadrats“

Taylorpolynom

Es sei $f(x)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion.

Gesucht: Polynom $T_n(x)$ der Ordnung n, so dass an der Stelle x_0 die Ableitungen der Funktion $f(x)$ und des Polynoms $T_n(x)$ übereinstimmen.

$$f(x) \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} T_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots \\ &\quad + a_n(x - x_0)^n \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0)\ ;\ k = 0, 1, \ldots, k$$

Die Koeffizienten a_k lassen sich elementar bestimmen.

Koeffizienten des Taylorpolynoms

$$
\begin{aligned}
T_n^{(n)}(x) &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot a_n\\
&\vdots\\
T_n''(x) &= 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}\\
T_n'(x) &= a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 \ldots + na_n(x-x_0)^{n-1}\\
f(x) \approx T_n(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= T_n(x_0) = a_0 \quad\rightsquigarrow\quad a_0 = f(x_0)\\
f'(x_0) &= T_n'(x_0) = a_1 \quad\rightsquigarrow\quad a_1 = f'(x_0)\\
f''(x_0) &= T_n''(x_0) = 2a_2 \quad\rightsquigarrow\quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}\\
&\vdots \qquad\quad \vdots\\
f^{(n)}(x_0) &= T_n^{(n)}(x_0) = n!a_n \quad\rightsquigarrow\quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}
\end{aligned}
$$

Taylorentwicklung

Mittels partieller Integration kann man den folgenden Zusammenhang zeigen:

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x_0,x)$$

mit $\quad R_n(x_0,x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,; \quad t \in [x_0,x]$

Gilt $R_n(x_0,x) \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$, dann entsteht die Taylorreihe der Funktion $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \end{aligned}$$

Taylorentwicklung; Beispiele

$$f(x) = \mathrm{e}^x\,,\ x_0 = 0\,; \qquad f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x\,,\ \ f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1\ :$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$f(x) = \cos x\,,\ x_0 = 0\,; \quad \begin{array}{rcl} f'(x) & = & -\sin x \\ f''(x) & = & -\cos x \\ f'''(x) & = & \sin x \\ f^{(4)}(x) & = & \cos x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f'(0) & = & 0 \\ f''(0) & = & -1 \\ f'''(0) & = & 0 \\ f^{(4)}(0) & = & 1 \end{array}$$

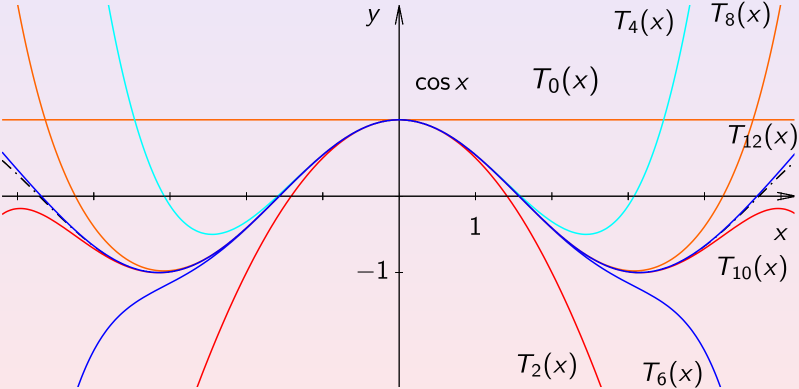
$$\Longrightarrow \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

---

analog: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Approximation von $f(x) = \cos x$ mit Taylorpolynomen

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} \pm \dots$$



$$T_{12}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!}$$

Komplexe e-Funktion

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots
\end{aligned}
$$

$$x = j \cdot \varphi \qquad \Longrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
e^{j\varphi} &= 1+(j\varphi)+\frac{(j\varphi)^2}{2!}+\frac{(j\varphi)^3}{3!}+\frac{(j\varphi)^4}{4!}+\frac{(j\varphi)^5}{5!}+\frac{(j\varphi)^6}{6!}+\frac{(j\varphi)^7}{7!}+\frac{(j\varphi)^8}{8!}+\frac{(j\varphi)^9}{9!}+\ldots \\
&= 1+j\varphi-\frac{(\varphi)^2}{2!}-j\frac{(\varphi)^3}{3!}+\frac{(\varphi)^4}{4!}+j\frac{(\varphi)^5}{5!}-\frac{(\varphi)^6}{6!}-j\frac{(\varphi)^7}{7!}+\frac{(\varphi)^8}{8!}+j\frac{(\varphi)^9}{9!}+\ldots \\
&= \left\{1-\frac{(\varphi)^2}{2!}+\frac{(\varphi)^4}{4!}-\frac{(\varphi)^6}{6!}+\frac{(\varphi)^8}{8!}+\ldots\right\}+j\cdot\left\{\varphi-\frac{(\varphi)^3}{3!}+\frac{(\varphi)^5}{5!}-\frac{(\varphi)^7}{7!}+\frac{(\varphi)^9}{9!}+\ldots\right\} \\
&= \cos\varphi \; + \; j\cdot\sin\varphi
\end{aligned}
$$

Beispiel: $\int\limits_0^1 \sin(x^2)dx$ mittels Potenzreihe von $\sin(x^2)$

$$sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7} + \ldots (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \sin(x^2)dx &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \ldots \\
&\quad \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3) \cdot (2n+1)!} \Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \frac{1}{15 \cdot 7!} + \ldots \\
&\quad \ldots + (-1)^n \frac{1}{(4n+3) \cdot (2n+1)!} \\
&\approx \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!}}_{=0.308766\ldots} - R\,; \quad |R| < \frac{1}{15 \cdot 7!} \approx 1.3 \cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

Trigonometrische Polynome

$$H_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$$

Approximation einer in $-\pi < x \leq \pi$ definierten Funktion $f(x)$:

$$D(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n) = \int_{-\pi}^{\pi} |H_n(x) - f(x)|^2 \, dx \quad \text{minimal für}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx; \quad k = 0, 1, 2 \ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \; dx; \quad k = 1, 2 \ldots \end{aligned}}$$

Satz von Fourier

Jede in $-\pi < x \leq \pi$ definierte stückweise stetige Funktion $f(x)$ von praktischer Bedeutung lässt sich mit den Koeffizienten a_k, b_k als konvergente trigonometrische Reihe darstellen:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)}$$

Die Fourierreihe konvergiert für jedes x_0 mit $-\pi < x_0 \leq \pi$ gegen

a) $f(x_0)$ an jeder Stetigkeitsstelle

b) $\frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)]$ an jeder Sprungstelle x_0

wobei $f(x_0+) = \lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)\,, \quad f(x_0-) = \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$

Spektraldarstlluung

Darstellung einer harmonischen Funktion mit Amplitude und Phasenwinkel

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = A_k \cos(kx + \varphi_k) = A_k \sin(kx + \tilde{\varphi}_k)$$

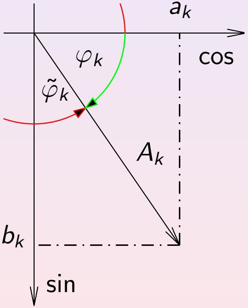
mit $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

$$\tan \varphi_k = -\frac{b_k}{a_k},$$

und

$$\tan \tilde{\varphi}_k = \frac{a_k}{b_k}$$

$$\text{bzw. } \tilde{\varphi}_k = \varphi_k + \frac{\pi}{2}$$



Kosinusreihe:

Sinusreihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx + \varphi_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx + \tilde{\varphi}_k)$$

Spektrum

Trägt man die Amplituden A_k bzw. die Phasenwinkel φ_k ($\tilde{\varphi}_k$) über den Frequenzen $k \cdot \omega$ bzw. über dem Frequenzparameter k auf, so erhält man das Amplitudenspektrum bzw. das Phasenspektrum der Schwingung.

Beides sind diskrete Linienspektren.

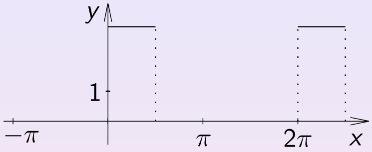
Das Amplitudenspektrum liefert eine Aussage über die Anteile der Grundschwingung und der einzelnen Oberschwingungen von f.

Der Summand $\frac{a_0}{2}$ stellt den Gleichanteil dar.

Beispiel, Teil 1

$$f(t) = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \le t < 2\pi \end{cases}$$

mit $f(t+2\pi) = f(t)$.



$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos kt\,dt = \left.\frac{\sin kt}{k}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{k} = \frac{1}{k}\cdot\begin{cases} (-1)^l \text{ für } k = 2l-1 \\ 0 \text{ für } k = 2l \end{cases}$$

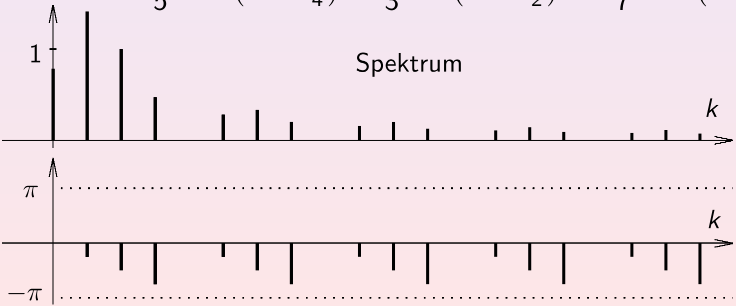
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \sin kt\,dt = -\left.\frac{\cos kt}{k}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1-\cos k\frac{\pi}{2}}{k} = \frac{1}{k}\cdot\begin{cases} 1 \text{ für } k = 4l-3 \\ 2 \text{ für } k = 4l-2 \\ 1 \text{ für } k = 4l-1 \\ 0 \text{ für } k = 4l \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\,dt = \frac{\pi}{2} \qquad l = 1, 2, \ldots$$

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \cos t - \frac{\cos 3t}{3} + \frac{\cos 5t}{5} - \frac{\cos 7t}{7} + \frac{\cos 9t}{9} \mp \ldots$$
$$+ \sin t + \sin 2t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 6t}{3} + \frac{\sin 7t}{7} + \ldots$$

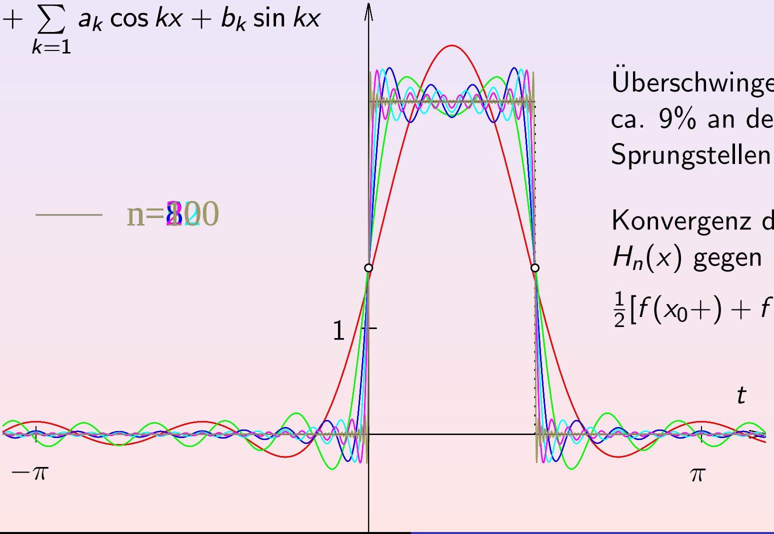
Beispiel, Teil 2

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{\pi}{4} + \cos t - \frac{\cos 3t}{3} + \frac{\cos 5t}{5} - \frac{\cos 7t}{7} + \frac{\cos 9t}{9} \mp \dots \\
&\qquad + \sin t + \sin 2t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 6t}{3} + \frac{\sin 7t}{7} + \dots \\
&= \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\cos\left(t - \tfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2t - \tfrac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}\cos\left(3t - \tfrac{3\pi}{4}\right) \\
&\qquad + \frac{\sqrt{2}}{5}\cos\left(5t - \tfrac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3}\cos\left(6t - \tfrac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{7}\cos\left(7t - \tfrac{3\pi}{4}\right) + \dots
\end{aligned}
$$



Gibbsches Phänomen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$



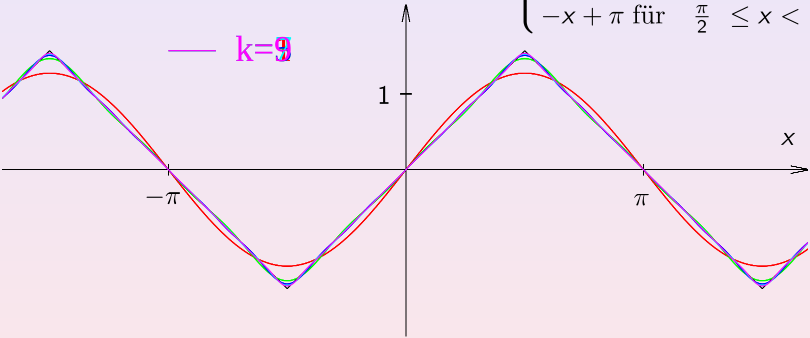
Überschwingen um ca. 9% an den Sprungstellen

Konvergenz der $H_n(x)$ gegen

$\frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)]$

Fourierreihe einer stetigen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x-\pi \text{ für } & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ x \quad \text{ für } & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ -x+\pi \text{ für } & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x - \frac{1}{49}\sin 7x + \frac{1}{81}\sin 9x \ldots \right)$$

$$f(x),\ f'(x), \ldots\ f^{(m)}(x) \text{ stetig} \implies a_k,\ b_k = O\left(\frac{1}{k^{m+2}}\right)$$

Komplexe Fourierreihe

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad \text{mittels} \quad \left\{ \begin{array}{rl} \cos kx = & \frac{1}{2}\left(e^{jkx} + e^{-jkx}\right) \\ \sin kx = & -\frac{j}{2}\left(e^{jkx} - e^{-jkx}\right) \end{array} \right\} \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(e^{jkx} + e^{-jkx}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} -jb_k \left(e^{jkx} - e^{-jkx}\right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k - jb_k)}_{=c_k} \mathrm{e}^{jkx} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k + jb_k)}_{=c_k^* = c_{-k}} \mathrm{e}^{-jkx} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{jkx}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{2} \\
c_k &= \tfrac{1}{2}(a_k - jb_k); \quad c_{-k} = c_k^* = \tfrac{1}{2}(a_k + jb_k); \quad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
a_k &= 2\,\mathrm{Re}\{c_k\} \quad = c_k + c_{-k}\ ; \quad k = 0, 1, 2 \ldots \\
b_k &= -2\,\mathrm{Im}\{c_k\} = j(c_k - c_{-k})\ ; \ k = 1, 2 \ldots
\end{aligned}
}
$$

$$
\begin{aligned}
c_k = \tfrac{1}{2}(a_k - jb_k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx - \frac{j}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \; dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot [\cos kx - j \sin kx]\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-jkx} \; dx\, ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots
\end{aligned}
$$

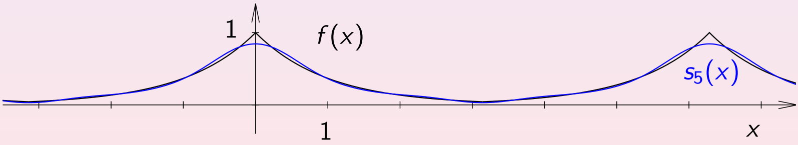
Beispiel: $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ für $-\pi < x \leq \pi$ mit $f(x+2\pi) = f(x)$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-jkx}dx = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-jkx}dx + \int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-jkx}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\left.\frac{\mathrm{e}^{(1-jk)x}}{1-jk}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{\mathrm{e}^{(-1-jk)x}}{-1-jk}\right|_{0}^{\pi}\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{(-1+jk)\pi}}{1-jk} + \frac{\mathrm{e}^{(-1-jk)\pi}-1}{-1-jk}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}\mathrm{e}^{jk\pi}}{1-jk} + \frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}\mathrm{e}^{-jk\pi}}{1+jk}\right\} \quad \text{wegen } \mathrm{e}^{jk\pi} = \mathrm{e}^{-jk\pi} = (-1)^k$$

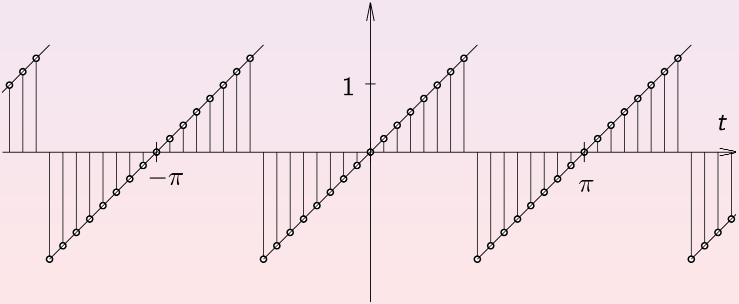
$$= \frac{1}{\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^k}{1+k^2}$$



$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^k}{1+k^2}\,\mathrm{e}^{jkx} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^k}{1+k^2}\cos(kx)$$

Abtastung

$f(t)\,;\ t \in \mathbb{R}$ periodische Funktion (zeitkontinuierlich)	$\xrightarrow{\text{Abtastung}}$	$\{f(kT)\}\,;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Zahlenfolge (zeitdiskret)



Trigonometrisches Interpolationspolynom

Trig. Interpolationspolynom vom Grad n durch $2n$ Stützstellen:

$$\boxed{H_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \frac{a_n}{2} \cos nx}$$

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1} f(x_i)\cos kx_i\,; \quad k = 0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n$$

$$b_k = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1} f(x_i)\sin kx_i\,; \quad k = 1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n-1$$

$$x_i = i \cdot \frac{\pi}{n}$$

Merkhilfe: $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1} f(x_i)\cos kx_i$

analog b_k

Komplexe Formulierung

$$\boxed{H_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \mathrm{e}^{jkx}}$$

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1} f(x_i)\mathrm{e}^{-jkx_i} = a_k - jb_k \,;\ k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

$$x_i = i \cdot \frac{\pi}{n}$$

$$c_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{2n-1} f(x_i)\mathrm{e}^{-jnx_i} = \frac{a_n}{2}\,; \qquad c_0 = \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{2n-1} f(x_i) = \frac{a_0}{2}\,;$$

Die direkte Berechnung der Koeffizienten c_k ist etwas mühsam. Die auszuwertenden Summanden $f(x_i)\mathrm{e}^{-jkx_i}$ treten bei verschiedenen Werten von k mehrfach auf. Der FFT-Algorithmus nutzt diese Tatsache geschickt aus. Dies führt zu einer entscheidenden Reduktion der Rechenzeit.

Beispiel, Teil 1

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \le x < 2\pi \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

Interpolationspolynom $H_{16}(x)$ der Ordnung 16, d. h. Abtastung an 32 Punkten mit: $x_i = \frac{\pi}{16} \cdot i\,; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 31$

$$c_0 = \frac{1}{32}\sum_{i=0}^{31} f(x_i) = \frac{\pi}{32}\sum_{i=0}^{7} 1 = \frac{\pi}{4}\,; \qquad c_{16} = \frac{1}{32}\sum_{i=0}^{31} f(x_i)\mathrm{e}^{-j\pi i} = \frac{\pi}{32}\sum_{i=0}^{7} \mathrm{e}^{-j\pi i} = 0$$

$$c_k = \frac{1}{16}\sum_{i=0}^{31} f(x_i)\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{16}\cdot k\cdot i} = \frac{\pi}{16}\sum_{i=0}^{7} \mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{16}\cdot k\cdot i} = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{16}\cdot k\cdot 8}}{1-\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{16}\cdot k}}\,; \qquad k = 1, \ldots, 15$$

Amplitudenspektrum:

$$A_k = \frac{\pi}{16}\sqrt{\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}\cdot k}\right)\cdot\left(1-\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}\cdot k}\right)}{\left(1-\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{16}\cdot k}\right)\cdot\left(1-\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{16}\cdot k}\right)}} = \frac{\pi}{16}\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{16}\cdot k\right)}} = \frac{\pi}{16}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{32}\cdot k\right)}$$

Beispiel, Teil 2