Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Kapitel 5:
Schließende Statistik

Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

5. Schließende Statistik: Typische Fragestellung anhand von Beispielen

Beispiel 1

- Aus 50 Messwerten ergeben sich für die Reißfestigkeit einer Garnsorte der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ = 21,45 N und die emp. Std.abweichung s = 0,47 N.
- Jede andere Stichprobe vom gleichen Umfang würde sicher etwas andere Werte liefern.
- $\bar{x}$ und s sind also nur Näherungen für Erwartungswert μ und Standardabweichung σ der entsprechenden Grundgesamtheit.
- Wie gut sind diese Näherungen? Bzw. wie erhält man Aussagen über die Güte dieser Näherungen?

➢ Beispiel 1 führt auf das Problem der **Parameterschätzung** *(Punktschätzung)* und der **Konfidenzintervalle** *(Vertrauensintervalle)*

5. Schließende Statistik: Typische Fragestellung anhand von Beispielen

Beispiel 2

- Zur Überprüfung der Symmetrie eines Würfels wird der Würfel 6.000 mal geworfen.
- Das Ergebnis dieser Würfeltests wird in einer Häufigkeitstabelle zusammengefasst:

x_i	1	2	3	4	5	6
$n(x_i)$	1076	1008	992	1059	923	942

- Man sieht: hohe Augenzahlen 5 und 6 treten seltener auf als niedrige Augenzahlen 1 und 2.
- Mittelwert: $\bar{x} = 3{,}4285$.
- Wie ist diese Asymmetrie und die Abweichung des Mittelwerts vom Erwartungswert $\mu = 3{,}5$ zu erklären?
- Handelt es sich um eine zufällige Abweichung bei einem idealen Würfel oder besteht auf Grund der beobachteten Häufigkeiten Anlass zu einem Zweifel an der Symmetrie des Würfels?

➢ Beispiel 2 ist typisch für das **Testen von Hypothesen**

5. Schließende Statistik: Typische Fragestellung

- Diese beiden Beispiele verdeutlichen das Grundproblem der beurteilenden Statistik:

  Welche Schlüsse kann man von einer Stichprobe auf die zugehörige Grundgesamtheit ziehen, und wie zuverlässig sind derartige Schlüsse?

Statistische Schätzverfahren:

- Die Aufgabenstellung von Schätzverfahren ist die Schätzung unbekannter Parameter oder der unbekannten Verteilung einer Grundgesamtheit aus den Werten einer Stichprobe. Im Folgenden wird nur auf die Parameterschätzung eingegangen. Man unterscheidet zwischen
- **Punktschätzungen:** Hierbei wird für den zu schätzenden Parameter ein einzelner Wert bestimmt und
- **Intervallschätzungen:** Dabei wird ein Intervall bestimmt, das den wahren, unbekannten Wert des Parameters mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überdeckt (Konfidenzintervall/Vertrauensbereich)

Hypothesentests:

- Man stellt eine Vermutung (Hypothese) über gewisse Größen der Grundgesamtheit auf. Diese Hypothese wird anhand der Ergebnisse aus einer Stichprobe überprüft. Dabei wird die Hypothese verworfen oder abgelehnt, wenn das Stichprobenergebnis in signifikantem Gegensatz zu ihr steht (sich nicht mit der Hypothese verträgt).

5. Schließende Statistik

In der schließenden oder beurteilenden Statistik wird aus einer endlichen oder unendlichen Grundgesamtheit eine Stichprobe vom Umfang n entnommen. An dieser Stichprobe werden bestimmte Merkmale beobachtet.

Die Informationen, die man über die Merkmale in der Grundgesamtheit haben möchte, werden über die Ausprägungen in der Stichprobe geschätzt.

Grundgesamtheit
(z.B. Gesamtbevölkerung Deutschlands)

Ziehen einer Stichprobe ↓ Rückschluss auf Grundgesamtheit ↑

Stichprobe
(z.B. 1000 zufällig ausgewählte Personen)

Dabei gibt es verschiedene Vorgehensweisen:

5.1 Punktschätzungen

Berechnung eines Zahlenwertes aus der Stichprobe zur Schätzung des Erwartungswertes μ, der Standardabweichung σ oder einer Wahrscheinlichkeit p.

Unbekannter Parameter	**Benutzter Punktschätzer bei einer Stichprobe vom Umfang n**
Wahrscheinlichkeit p	$\hat{p} = \frac{k}{n}$ (relative Häufigkeit, d.h. bei einer Stichprobe vom Umfang n trat das gesuchte Ereignis k-mal auf)
Erwartungswert μ	$\hat{\mu} = \bar{x}$ (arithmetische Mittel der Stichprobe)
Standardabweichung σ	$\hat{\sigma} = s$ (empirische Standardabweichung der Stichprobe)
Varianz σ^2	$\hat{\sigma}^2 = s^2$ (empirische Varianz der Stichprobe)

Nach dem Gesetz der großen Zahlen liegt bei einem großen Stichprobenumfang der aus der Stichprobe geschätzte Wert in der Nähe des echten (unbekannten) Parameters der Grundgesamtheit.

5.1 Punktschätzungen

Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Für die Überprüfung der **Abweichung zwischen geschätztem Wert und tatsächlichem Wert** der Grundgesamtheit gibt es zwei Möglichkeiten.

Typische Fragen sind:

1) Kann man bestimmte Werte von μ, σ oder p ausschließen? Z. B. kann man ausschließen, dass $p \leq 0{,}5$ gilt?
2) Kann man einen Bereich angeben, in dem μ, σ oder p liegen können, etwa in der Form „p liegt im Intervall $[0{,}63\ ;\ 0{,}67]$"?

Es gibt keine Antworten, die mit 100%-iger Sicherheit richtig sind. Aber die Statistik gibt uns Verfahren, die mit großer Wkt. richtige Antworten liefern:

1) Die Durchführung eines **Hypothesentests**, um bestimmte Werte für μ, σ oder p mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (z. B. 95 %) auszuschließen.
2) Die Bildung von **Vertrauensbereichen / Konfidenzintervallen** d.h. ein Intervall, indem μ, σ oder p mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit z. B. 95 % liegt.

5.2 Hypothesentests

Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Verfahren zur Gewinnung von Information über eine Grundgesamtheit aus einer Stichprobe. Dazu müssen folgende Schritte durchgeführt werden.

a) Formulierung der Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_1

➢ H_0 beinhaltet den zu widerlegenden Wert (bzw. die zu widerlegenden Werte)

➢ H_1 beinhaltet den zu bestätigenden Wert (bzw. die zu bestätigenden Werte)

b) Wahl des Signifikanzniveaus α z.B. $\alpha = 5\%$, $\alpha = 1\%$, $\alpha = 0{,}1\%$:

➢ α ist eine kleine Irrtumswahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese nicht zutrifft und trotzdem angenommen wird.

c) Berechnung des Zufallsstreubereiches:

➢ Wenn H_0 zutrifft, dann liegt der zu testende Wert mit großer Wahrscheinlichkeit (also mit Wahrscheinlichkeit 1-α) im entsprechenden Zufallsstreubereich.

d) Testentscheidung:

➢ Wenn der aus der Stichprobe berechnete Wert im Zufallsstreubereich liegt, dann wird H_0 beibehalten,

➢ Wenn der aus der Stichprobe berechnete Wert *nicht* im Zufallsstreubereich liegt, dann wird H_0 zugunsten von H_1 abgelehnt. Man sagt auch: H1 ist signifikant (bei Signifikanzniveau α).

e) Antwortsatz bzw. Formulierung der Testentscheidung:

Fehlerarten:

Bei einem Hypothesentest spricht man von einem

- **Fehler 1. Art** (oder α-Fehler), wenn H_0 irrtümlich abgelehnt wird, obwohl H_0 wahr ist.
- **Fehler 2. Art** (oder β-Fehler), wenn H_0 irrtümlich beibehalten wird, obwohl H_0 falsch ist.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art wird zu Beginn des Hypothesentests durch Vorgabe von α nach oben beschränkt. Dieser Fehler ist also unter Kontrolle.

Die Wahrscheinlichkeit β für einen Fehler 2. Art ist in der Regel nicht vorgegeben.

Fehlerarten: Übersicht

	H_0 wird verworfen	H_0 wird nicht verworfen
H_1 trifft zu	Richtige Entscheidung	Fehler 2. Art (β-Fehler) Wahrscheinlichkeit: β oder $1-\beta$ (je nach Bez.)
H_0 trifft zu	Fehler 1. Art (α-Fehler) Wahrscheinlichkeit: höchstens α (klein)	Richtige Entscheidung

5.2.1 Gauß-Test

Test zum Signifikanzniveau α für den unbekannten Erwartungswert μ bei <u>bekannter</u> Standardabweichung σ und einer Stichprobe vom Umfang n

H_0	H_1	Zufallsstreubereich, falls H_0 zutrifft	H_0 verwerfen falls
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\left[\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	$\bar{x} \notin \mathrm{ZSB}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\left[\mu_0 - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \infty\right)$	$\bar{x} \notin \mathrm{ZSB}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\left(-\infty; \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	$\bar{x} \notin \mathrm{ZSB}$

5.2.2 t-Test

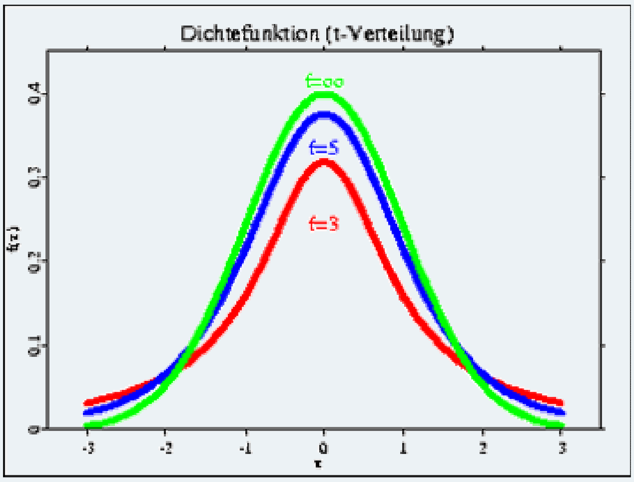
Test zum Signifikanzniveau α für den unbekannten Erwartungswert μ bei <u>unbekannter</u> Standardabweichung σ und einer Stichprobe vom Umfang n

H_0	H_1	Zufallsstreubereich, falls H_0 zutrifft	H_0 verwerfen falls
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\left[\mu_0 - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \mu_0 + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$	$\bar{x} \notin \mathrm{ZSB}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\left[\mu_0 - t_{n-1;1-\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \infty\right)$	$\bar{x} \notin \mathrm{ZSB}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\left(-\infty; \mu_0 + t_{n-1;1-\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$	$\bar{x} \notin \mathrm{ZSB}$

5.2.2 t-Test: die t-Verteilung

t-Verteilung (auch: Student-t-Verteilung) mit n Freiheitsgraden

- Stichprobe vom Umfang $n \Rightarrow$ $T = \frac{\overline{X} - \mu}{s} \cdot \sqrt{n}$ hat eine t-Verteilung mit n-1 Freiheitsgraden
- Dichtefunktion der t-Verteilung:
- symmetrische Glockenkurve zum Erwartungswert 0 (wie Standardnormalverteilung)
- aber: Dichte der t-Verteilung ist flacher als Dichte der Std.normalvert. (d. h. geringere Höhe und größere Streuung)
- für $n \to \infty$ konvergiert die Dichte der t-Verteilung gegen die Dichte der Std.normalvert.
- Ab $n \geq 30$ kann die t-Verteilung in guter Näherung durch die Std.norm.vert. approximiert werden.
- Quantile der t-Verteilung $\Rightarrow$ Tabelle



5.2.3 Zweistichproben t-Test

Test zum Signifikanzniveau α über die Differenz zweier Erwartungswerte μ_1- μ_2 zweier Grundgesamtheiten bei unbekannter aber gleicher Standardabweichung σ.

Zum Test werden zwei Stichproben vom Umfang n und m mit den arithmetischen Mitteln $\overline{x}_1$ und $\overline{x}_2$ und mit den empirischen Standardabweichungen s_1 und s_2 gezogen

H_0	**H_1**	**Zufallsstreubereich, falls H_0 zutrifft**	**H_0 verwerfen falls**
μ_1-μ_2=0	μ_1-μ_2≠0	$\left[-t_{m+n-2;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_d ; t_{m+n-2;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_d\right]$	$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \notin \text{ZSB}$
μ_1-μ_2≥0	μ_1-μ_2<0	$\left[-t_{m+n-2;1-\alpha} \cdot s_d ; \infty\right)$	$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \notin \text{ZSB}$
μ_1-μ_2≤0	μ_1-μ_2>0	$\left(-\infty ; t_{m+n-2;1-\alpha} \cdot s_d\right]$	$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \notin \text{ZSB}$

wobei $s_d = \sqrt{(n-1) \cdot s_1^2 + (m-1) \cdot s_2^2} \cdot \sqrt{\frac{n+m}{m \cdot n \cdot (n+m-2)}}$

5.2.4 Test über eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p

Test zum Signifikanzniveau α über der unbekannten Wahrscheinlichkeit p bei einer Stichprobe vom Umfang n

H_0	H_1	Zufallsstreubereich, falls H_0 zutrifft	H_0 verwerfen falls
$p = p_0$	$p \neq p_0$	$\left[p_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{p_o(1-p_0)}}{\sqrt{n}};\, p_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{p_o(1-p_0)}}{\sqrt{n}}\right]$	$\frac{k}{n} \notin \text{ZSB}$
$p \geq p_0$	$p < p_0$	$\left[p_0 - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}};\, 1\right]$	$\frac{k}{n} \notin \text{ZSB}$
$p \leq p_0$	$p > p_0$	$\left[0;\, p_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sqrt{p_0(1-p_o)}}{\sqrt{n}}\right]$	$\frac{k}{n} \notin \text{ZSB}$

5.3 Vertrauensbereiche / Konfidenzintervalle

Unter einem Vertrauensbereich oder einem Konfidenzintervall versteht man ein Intervall, das mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ (z.B. 90 %, 95 %, 99 %) den wahren Wert für μ, σ^2 oder p überdeckt.

5.3.1 Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2 zum Konfidenzniveau $1\text{-}\alpha$

Art des Vertrauensbereichs	Berechnung des Vertrauensbereichs
zweiseitig	$\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
einseitig nach unten begrenzt	$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\, \infty\right)$
einseitig nach oben begrenzt	$\left(-\infty;\, \bar{x} + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

5.3 Vertrauensbereiche / Konfidenzintervalle

5.3.2 Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz zum Konfidenzniveau $1-\alpha$

Art des Vertrauensbereichs	Berechnung des Vertrauensbereichs
zweiseitig	$\left[\bar{x}-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}};\bar{x}+t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$
einseitig nach unten begrenzt	$\left[\bar{x}-t_{n-1;1-\alpha}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}};\infty\right)$
einseitig nach oben begrenzt	$\left(-\infty;\bar{x}+t_{n-1;1-\alpha}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

5.3 Vertrauensbereiche / Konfidenzintervalle

5.3.3 Vertrauensbereich für die Differenz μ_1- μ_2 der Erwartungswerte zweier Normalverteilungen bei gleicher aber unbekannter Varianz σ^2 zum Konfidenzniveau $1-\alpha$

Zum Test werden zwei Stichproben vom Umfang n und m mit den arithmetischen Mitteln $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ und mit den empirischen Standardabweichungen s_1 und s_2 gezogen

Art des Vertrauensbereichs	Berechnung des Vertrauensbereichs
zweiseitig	$\left[\bar{x}-\bar{y}-t_{m+n-2;1-\frac{\alpha}{2}}\cdot s_d;\bar{x}-\bar{y}+t_{m+n-2;1-\frac{\alpha}{2}}\cdot s_d\right]$
einseitig nach unten begrenzt	$\left[\bar{x}-\bar{y}-t_{n+m-2;1-\alpha}\cdot s_d;\infty\right)$
einseitig nach oben begrenzt	$\left(-\infty;\bar{x}-\bar{y}+t_{n+m-2;1-\alpha}\cdot s_d\right]$

wobei $$s_d=\sqrt{(n-1)\cdot s_1^2+(m-1)\cdot s_2^2}\cdot\sqrt{\frac{n+m}{m\cdot n\cdot(n+m-2)}}$$

5.3 Vertrauensbereiche / Konfidenzintervalle

5.3.4 Vertrauensbereich für eine Wahrscheinlichkeit p zum Konfidenzniveau $1-\alpha$

Wenn bei einer Stichprobe vom Umfang n, das gesuchte Ereignis k-mal aufgetreten ist, wird als Punktschätzer der Wert

$$\hat{p} = \frac{k}{n}$$

verwendet. Der Vertrauensbereich zum Konfidenzniveau $1\text{-}\alpha$ berechnet sich dann als

Art des Vertrauensbereichs	**Berechnung des Vertrauensbereichs**
zweiseitig	$\left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}};\ \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right]$
einseitig nach unten begrenzt	$\left[\hat{p} - z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}};1\right]$
einseitig nach oben begrenzt	$\left[0;\ \hat{p} + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right]$