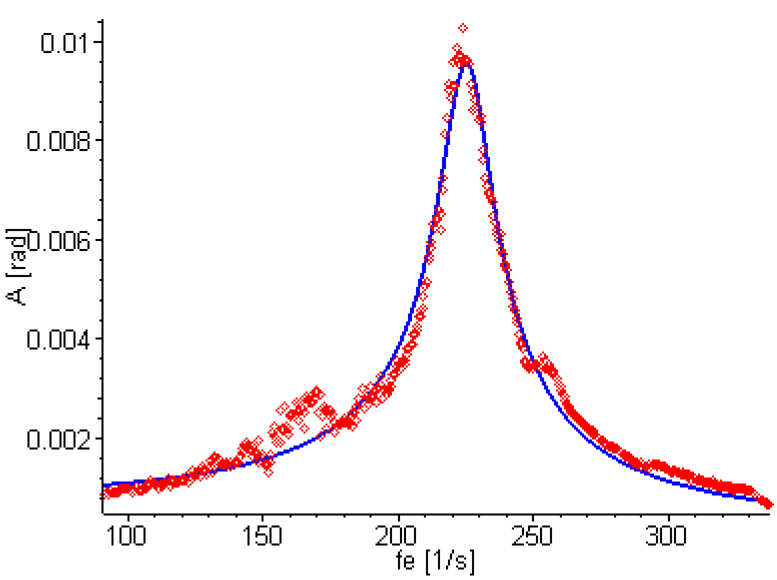
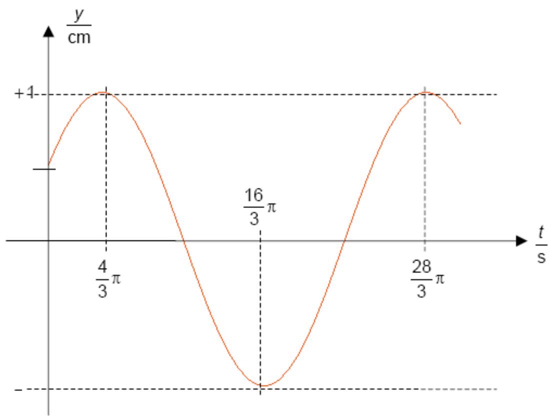
Übungsaufgaben zur Schwingungslehre

Maschinenbau Bachelor (EKB3 und EPB3)

(Modul Technische Mechanik 2)



Sc.1 In der folgenden Skizze finden Sie das Weg,Zeit-Diagramm für eine ungedämpfte harmonische Bewegung.



a) Bestimmen Sie aus diesem Diagramm und den angegebenen Daten

a1) die Amplitude $\hat{y}$,

a2) die Schwingungsdauer T_0,

a3) die Eigenfrequenz f_0,

a4) die Eigenkreisfrequenz ω_0,

a5) den Nullphasenwinkel φ_0.

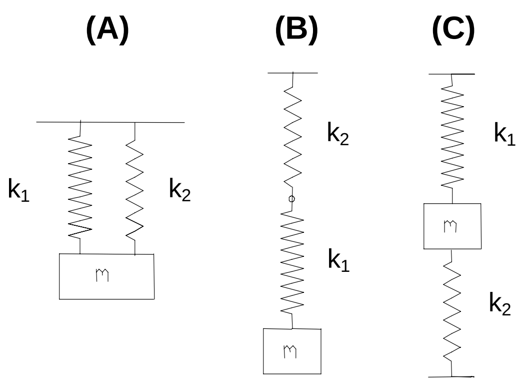
b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung $y(t)$ für die gezeichnete ungedämpfte harmonische Schwingung auf.

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v_0 = v(0)$ für den Zeitpunkt $t = 0$.

Sc.2 Zwei Federn mit den Federkonstanten k_1 und k_2 werden durch das Anhängen eines Körpers der Masse m = 3 kg um $\Delta y_1 = 2$ cm bzw. $\Delta y_2 = 5$ cm verlängert.

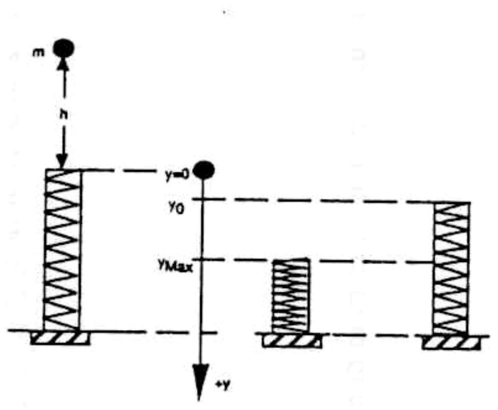
a) Berechnen Sie die beiden Federkonstanten.

b) Welche Eigenfrequenzen habe die unten skizzierten Anordnungen (mit Begründung/Herleitung der Ersatzfederkonstante).



Bemerkung: Die Kippbewegung in Skizze (A) soll vernachlässigt werden.

Sc.3 Eine kleine Kugel der Masse $m = 100$ g fällt aus der Höhe $h = 20$ cm auf eine entspannte und masselose Feder mit der Federkonstanten $k = 20$ N/m (siehe Abb.) Die Kugel haftet auf der Feder und führt harmonische Schwingungen aus. Von Reibungseinflüssen ist abzusehen.



a) Um welche maximale Strecke $y = y_{max}$ wird die entspannte Schraubenfeder zusammengedrückt?

b) Mit welcher Frequenz f_0 schwingt das Feder-Massesystem?

c) Um welche Gleichgewichtslage $y = y_0$ erfolgt die Schwingung?

d) Wie groß ist die Amplitude $\hat{y}$ der Schwingung?

e) Wie lauten die Anfangsbedingungen $y(0)$ und $\dot{y}(0)$ im Zeitpunkt $t = 0$ des Auftreffens der Kugel auf die entspannte Feder?

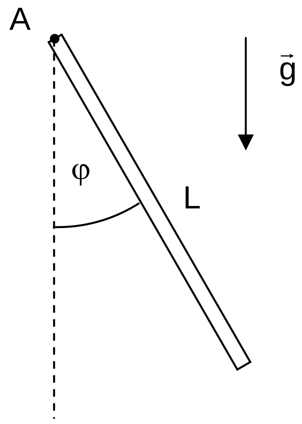
f) Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf der Schwingung $y(t)$ im y-t Diagramm.

g) Geben Sie die Formel für die Lösung $y(t)$ an und legen Sie dabei die in der Abbildung festgelegte y-Achse zu Grunde.

h) Berechnen Sie den Nullphasenwinkel der harmonischen Schwingung $y(t)$ aus den Anfangsbedingungen.

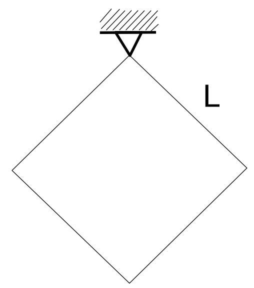
Sc.4 Ein dünner Stab der Länge L ist reibungsfrei drehbar im Punkt A aufgehängt (s. Skizze).

Stellen Sie den Energieerhaltungssatz auf und bestimmen Sie die Eigenfrequenz f_0 (für kleine Auslenkwinkel φ) mit Hilfe der Energiemethode.



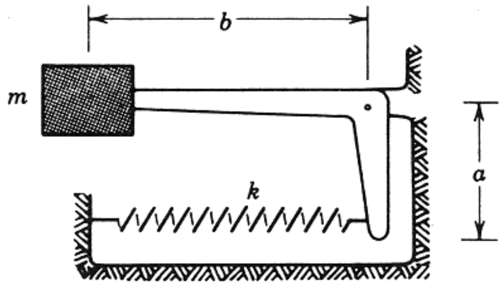
Sc.5 Ein quadratischer Rahmen, der aus dünnen Stäben der Länge L gefertigt ist, wird an einer Ecke A drehbar aufgehängt. Der Rahmen wird aus der Ruhelage ausgelenkt und schwingt frei in der Rahmenebene mit der Schwingungsdauer $T_0 = 2.00$ s.

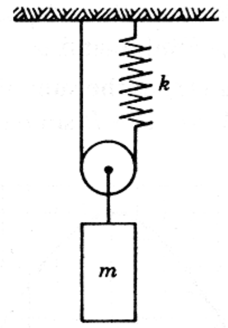
Berechnen Sie die Länge L eines Stabes unter Vernachlässigung von Reibungseinflüssen und unter Beschränkung auf kleine Ausschläge.



<u>Hinweis</u>: Das Massenträgheitsmoment eines dünnen Stabes (Masse m, Länge L) bezüglich einer Achse, die senkrecht zur Stabachse durch den Schwerpunkt geht, beträgt $J_S = (\frac{1}{12})\, m\, L^2$.

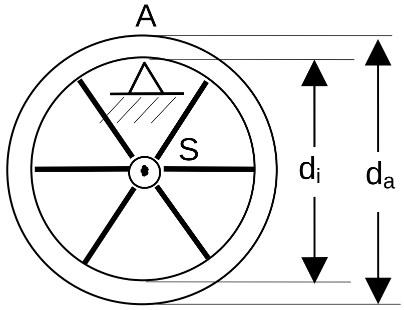
Sc.6 Bestimmen Sie die Eigenfrequenz f_0 des horizontalen Pendels für kleine Auslenkwinkel als Funktion von a, b, k und m. Vernachlässigen Sie die Masse des Hebelarms.





Sc.7 Bestimmen Sie die Eigenfrequenz f_0 des Einmassensystems für nicht zu große Auslenkungen (s. Skizze). Die Masse der Umlenkrolle sei vernachlässigbar.

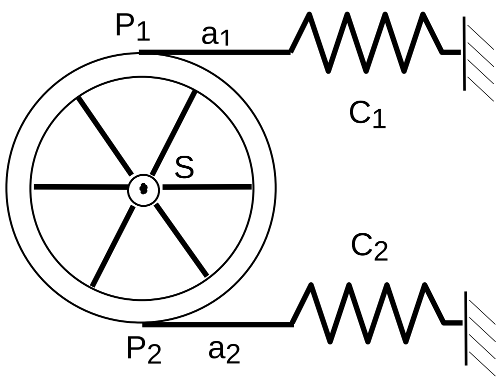
Sc.8 Ein Rad hat die Masse $m = 1.5\ \text{kg}$, den Innendurchmesser $d_i = 180\ \text{mm}$ und den Außendurchmesser $d_a = 220\ \text{mm}$. In einem ersten Versuch (vgl. Skizze 1) wird das Rad an einem Nagel im Punkt A aufgehängt. Man lässt es (bei kleinen Auslenkwinkeln aus der Ruhelage) im Schwerefeld der Erde pendeln. Die gemessene Periodendauer ist $T_A = 1.2\ \text{s}$.



Skizze 1

a) Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment J_S bezüglich der Radachse durch den Massenmittelpunkt.

In einem zweiten Versuch (vgl. Skizze 2) wird das Rad im Schwerpunkt S reibungsfrei gelagert. In den Punkten P_1 und P_2 sind Federn mit den Federkonstanten $c_1 = c_2 = 1.2\ \text{N}\,\text{cm}^{-1}$ befestigt. Im Ruhezustand bilden die starren Verbindungen a_1 und a_2 Tangenten an den äußeren Radumfang.



Skizze 2

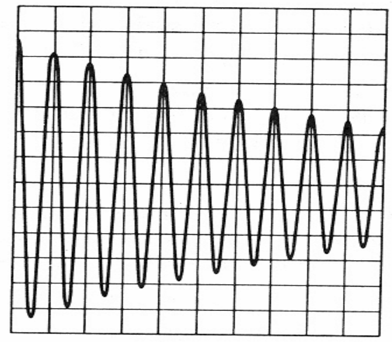
b) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Drehschwingungen des Rades auf. Dies soll wieder unter der Voraussetzung kleiner Winkelausschläge erfolgen.

c) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 und die Periodendauer T_0 der Drehschwingungen um S.

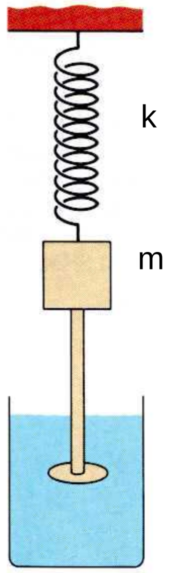
Durch Aufstecken von zwei Flügeln (Masse vernachlässigbar) auf die Felge führt man eine Dämpfung des schwingungsfähigen Systems ein. Man beobachtet, dass die Winkelausschläge in fünf Schwingungsperioden jeweils auf die Hälfte abnehmen.

d) Bestimmen Sie den Dämpfungsgrad D des Systems?

Sc.9 Bestimmen Sie das logarithmische Dekrement Λ und den Dämpfungsgrad D der im Bild dargestellten viskos gedämpften freien Schwingung.



Sc.10 Ein Feder-Masse-System (m = 0,95 kg, k = 90 N/m) hat bei einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung eine Schwingungsdauer von T_d = 0,66 s.



a) Welche Eigenkreisfrequenz ω_0 hat das ungedämpfte System? Welchen Dämpfungsgrad *D* hat das gedämpfte System?

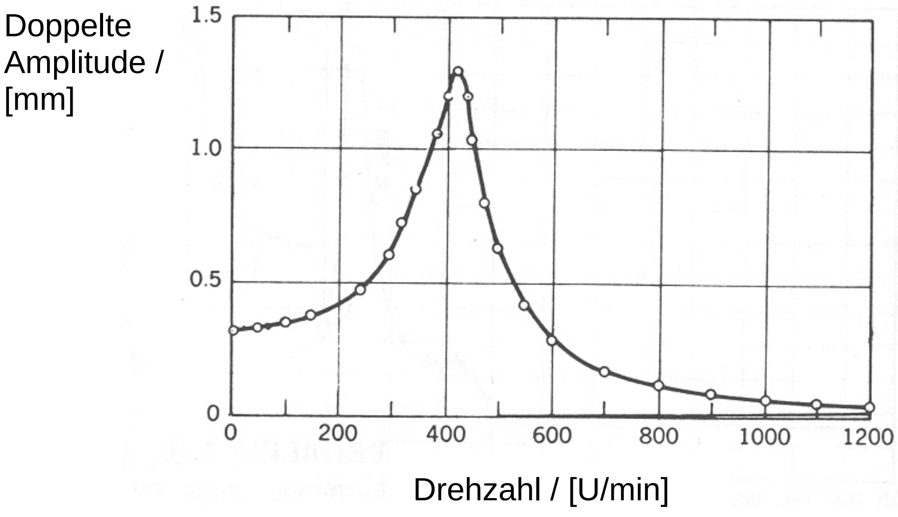
b) Wie groß ist die Auslenkung y(t) des Körpers nach zwei Schwingungsperioden, wenn die Anfangsauslenkung 8 cm war?

c) Welcher Anteil der Schwingungsenergie wurde während dieser zwei Schwingungsperioden in Wärme umgewandelt?

d) Welchen Wert muss die Dämpfungskonstante *b* im Reibungsgesetz $F_R = -b \cdot v$ haben, damit sich der aperiodische Grenzfall einstellt?

e) Welche Werte nehmen in der Bewegungsgleichung $y(t) = (y_1 + y_2\, t)e^{-\delta t}$ des aperiodischen Grenzfalls die Konstanten y_1 und y_2 an, wenn der Körper zur Zeit *t* = 0 keine Geschwindigkeit besitzt?

Sc.11 Die folgende Kurve stellt den tatsächlichen Verlauf der Vertikalbewegung des Bodens in der Nähe einer Stanzmaschine dar. Schätzen Sie die Werte für den Dämpfungsgrad D und die Eigenfrequenz f_0 des Bodens ab.



Sc.12 Ein Körper der Masse m = 300 g hängt an einer Feder mit der Federkonstante k = 10 N/m und führt schwach gedämpfte Schwingungen aus. Man stellt fest, dass nach der Zeit $t_{1/2}$ = 20 s die Schwingungsamplitude auf die Hälfte des Anfangswertes abgeklungen ist.

a) Wie groß ist die Abklingkonstante δ und der Dämpfungsgrad D der gedämpften Schwingung?

b) Der Körper wird durch eine zeitlich harmonische Kraft $F_E(t)$ zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Bestimmen Sie die Kraftamplitude $\hat{F}_E$, wenn im Resonanzfall die maximale Amplitude $\hat{y}_{res}$ = 5 cm gemessen wird?

c) Wie groß ist die Erregerfrequenz f_E bei maximalem Ausschlag?

d) Welche mittlere Leistung $\overline{P}$ geht im Resonanzfall in Wärme über?

e) Welche Anregungsfrequenz muss gewählt werden, damit der Körper mit einer Amplitude von nur $\hat{y}$ = 1 mm schwingt?

Lösungen:

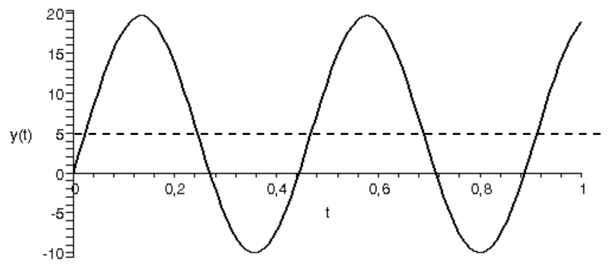
Sc.1 a1) 1 cm a2) 25.1 s a3) 0.040 Hz a4) 0.25 rad/s a5) $-\pi/3$

b) $y(t) = 1\text{ cm} \cos[(0.25\text{ rad/s})\, t - \pi/3]$ c) $v_0 = 0.217$ cm/s

Sc.2 a) 1.47 kN/m und 589 N/m b) 4.17 Hz für (A) und (C), 1.88 Hz für (B)

Sc.3 a) $y_{max} = 19.8$ cm b) $f_0 = 2.25$ Hz c) $y_0 = 4.90$ cm d) $\hat{y} = 14.8$ cm

e) $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 1.98$ m/s f)



g) 251° bzw. 4.37 rad h) $y(t) = 4.91\text{ cm} + 14.8\text{ cm} \cos(14.1\text{ s}^{-1} \cdot t + 4.37)$

Sc.4 $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}}$

Sc.5 a) $L = 0.843$ m

Sc.6 $f_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Sc.7 $f_0 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Sc.8 a) $3.62 \cdot 10^{-2}$ kg m^2 b) $\ddot{\beta} + \frac{2 \cdot c \cdot R_a^2}{J_S}\beta = 0$ c) 8.96 s^{-1}, 0.70 s d) 0.022

Sc.9 $\Lambda = 0.089$, $D = 0.014$

Sc.10 a) 9.73 1/s und 0.208 b) 0.551 cm c) 99.5% d) 18.5 kg/s

e) 8 cm und 77.9 cm/s

Sc.11 $D = 0.124$ und $f_0 = 423$ U/min

Sc.12 a) $3.47 \cdot 10^{-2}$ s^{-1}, $6.01 \cdot 10^{-3}$ b) $6.01 \cdot 10^{-3}$ N c) 0.919 Hz

d) $8.67 \cdot 10^{-4}$ W e) 0.581 Hz, 1.16 Hz