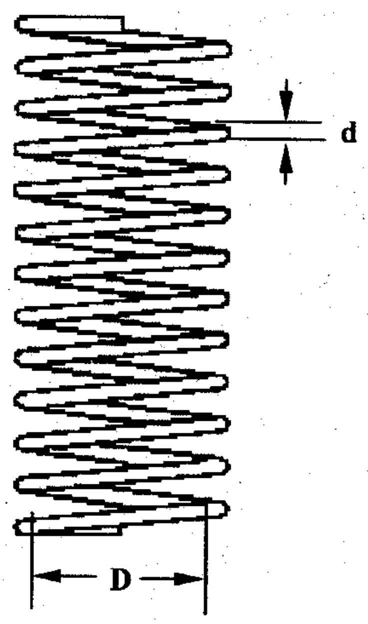
# *Physiklabor*

# Musteraufgaben zum Thema *FEHLERRECHNUNG*

Zusammengestellt von Prof. Dr. Günther Kurz

Mai 2004

## Aufgabe 1
## Federkonstante einer Schraubenfeder




Einfache harmonische Schwingungen eines Feder-Masse-Systems ergeben sich für ein lineares Kraftgesetz. Die Proportionalitätskonstante ist die Federkonstante *c*.

Die Federkonstante *c* einer Schraubenfeder hängt von den elastischen Eigenschaften des Materials und von der Geometrie der Feder ab. In einen Handbuch für Ingenieure findet sich – als reines Potenzgesetz – die folgende Beziehung für die Federkonstante *c* einer Schraubenfeder:

$$c = \frac{Gd^4}{8nD^3}$$ dabei ist

*d* Drahtdurchmesser des Federmaterials

*D* Kerndurchmesser der Feder
*n* Anzahl der aktiven Windungen
*G* Schubmodul des Federmaterials

Für eine aus Stahl gefertigte Feder gelten folgende Werte mit den zugehörigen abgeschätzten maximalen Fehlern

| | |
|---|---|
| $d = 1{,}00$ mm | $\Delta d = \pm 2 \cdot 10^{-2}$ mm |
| $D = 30{,}00$ mm | $\Delta D = \pm 1 \cdot 10^{-1}$ mm |
| $n = 150$ | $\Delta n = \pm 1$ |
| $G = 81 \cdot 10^9$ Pa | $\Delta G = \pm 2 \cdot 10^9$ Pa |

Bestimmen Sie aus diesen Angaben

(a) die Federkonstante *c* der Feder, und

(b) den Größtfehler (relativ und absolut) des Ergebnisses von Teilaufgabe (a). Nutzen Sie die Tatsache, dass für die Federkonstante ein reines Potenzgesetz vorliegt.

(c) Fassen Sie Federkonstante und Größtfehler (relativ und absolut) zu einem Endergebnis zusammen.

(d) Bestimmen Sie den mittleren absoluten Fehler und den Größtfehler nach dem Verfahren von GAUSS.

(e) Vergleichen Sie die Ergebnisse der beiden benutzten Verfahren aus den Teilaufgaben (b) und (d) miteinander. [Hinweis: Der mittlere absolute Fehler nach GAUSS sollte kleiner sein als der Größtfehler.]

**Lösung**

(a) Die Federkonstante errechnet sich nach der angegebenen Beziehung zu

$$c=\frac{Gd^4}{8nD^3}=\frac{81\cdot 10^9\ \mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot\frac{10^{-12}\ \mathrm{m}^4}{8\cdot 150\cdot 27\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3}=2{,}50\ \mathrm{N\,m}^{-1}$$

(b) Für eine physikalische Größe, die einem reinen Potenzgesetz folgt, liefert das Fehlerfortpflanzungsgesetz für den relativen Größtfehler sofort

$$\frac{\Delta c}{c}=\left|\frac{\Delta G}{G}\right|+4\cdot\left|\frac{\Delta d}{d}\right|+3\cdot\left|\frac{\Delta D}{D}\right|+\left|\frac{\Delta n}{n}\right|$$

$$=\frac{2}{81}+4\cdot\frac{2\cdot 10^{-2}}{1{,}00}+3\cdot\frac{10^{-1}}{30{,}00}+\frac{1}{150}=0{,}025+0{,}080+0{,}010+0{,}007$$

$$=0{,}122\,\hat{=}\,12{,}2\ \%$$

Mit dem Ergebnis der Teilaufgabe (a)

$$c=2{,}50\ \mathrm{Nm}^{-1}\ \text{und}\ \frac{\Delta c}{c}=0{,}122$$

ergibt sich der absolute Größtfehler zu

$$\Delta c=0{,}122\cdot 2{,}50\ \mathrm{Nm}^{-1}=0{,}31\,\mathrm{Nm}^{-1}$$

(c) Damit stellt sich das Endergebnis dar als

$$c=(2{,}5\pm 0{,}3)\ \mathrm{Nm}^{-1}\qquad \text{oder als}\qquad c=2{,}50\ \mathrm{Nm}^{-1}\,(1\pm 10\ \%)$$

(d) Da ein reines Potenzgesetz vorliegt, ist dies der ‘schnellste’ Weg zum Ergebnis. Der Weg über den mittleren absoluten Fehler nach GAUSS muß aber das gleiche Ergebnis zeigen. Dieser ‘Umweg’ bei reinen Potenzgesetzen sei im Folgenden demonstriert.

Zunächst werden sämtlche Längenangaben einheitlich auf ‘m’ umgerechnet.

$$c=\frac{Gd^4}{8nD^3}\qquad \begin{array}{ll} d=1{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} & \Delta d=\pm 2{,}0\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} \\ D=3{,}0\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} & \Delta D=\pm 1{,}0\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} \\ n=150 & \Delta n=\pm 1 \\ G=81\cdot 10^9\,\mathrm{Nm}^{-1} & \Delta G=\pm\, 2\cdot 10^9\,\mathrm{Nm}^{-1} \end{array}$$

Zur Berechnung des mittleren absoluten Fehler nach GAUSS braucht man die partiellen Ableitungen und die bereits bekannten Abweichungen; also

$$\frac{\partial c}{\partial G}\Delta G=\frac{d^4}{8nD^3}\Delta G$$

$$=\frac{10^{-12}\,\mathrm{m}^4}{8\cdot 150\cdot 27\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3}\cdot 2\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}=6{,}17\cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\frac{\partial c}{\partial d}\Delta d = \frac{G \cdot 4 \cdot d^3}{8nD^3}\Delta d$$

$$= \frac{81 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm}^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}^3}{8 \cdot 150 \cdot 27 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3} \cdot 2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} = 2{,}00 \cdot 10^{-1}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\frac{\partial c}{\partial n}\Delta n = \frac{G \cdot d^4(-1)}{8 \cdot D^3 \cdot n^2}\Delta n$$

$$= \frac{-81 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm}^{-2} \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}^4}{8 \cdot 27 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3 \cdot 150^2} \cdot 1 = -1.67 \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\frac{\partial c}{\partial D}\Delta D = \frac{G \cdot d^4(-3)}{8 \cdot n \cdot D^4}\Delta D$$

$$= \frac{-81 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm}^{-2} \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}^4 \cdot 3}{8 \cdot 150 \cdot 81 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^4} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = 2{,}50 \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Damit wird der mittlere absolute Fehler nach GAUSS:

$$\Delta\bar{c} = \sqrt{\left[\frac{\partial c}{\partial G}\Delta G\right]^2 + \left[\frac{\partial c}{\partial d}\Delta d\right]^2 + \left[\frac{\partial c}{\partial n}\Delta n\right]^2 + \left[\frac{\partial c}{\partial D}\Delta D\right]^2}$$

$$= \sqrt{(38{,}1 + 400{,}0 + 2{,}8 + 6{,}25)10^{-4}\,\mathrm{N}^2\mathrm{m}^{-2}}$$

$$= \sqrt{447{,}1} \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 2{,}2 \cdot 10^{-1}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Der Größtfehler nach GAUSS ergibt sich zu

$$\Delta c_{\mathrm{max}} = \left|\frac{\partial c}{\partial G}\right|\Delta G + \left|\frac{\partial c}{\partial d}\right|\Delta d + \left|\frac{\partial c}{\partial n}\right|\Delta n + \left|\frac{\partial c}{\partial D}\right|\Delta D$$

$$\Delta c_{\mathrm{max}} = (6{,}17 + 20{,}00 + 1{,}67 + 2{,}50)10^{-2}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 3{,}1 \cdot 10^{-1}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} > \Delta\bar{c}$$

(e) Der Größtfehler nach GAUSS $\Delta c_{\mathrm{max}}$ stimmt mit dem Ergebnis $\Delta c$ nach der Potenzgesetzregel überein. Aber der Weg dazu ist sehr viel aufwendiger.

Hinweis: Beim Auftreten von Differenzen oder Summen kommt man aber um dem mühsamen Weg der partiellen Differentiale nicht herum.

Der Größtfehler ist größer als der mittlere absolute Fehler nach GAUSS.

$$\Delta c_{\mathrm{max}} = 3{,}1 \cdot 10^{-1}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} > \Delta\bar{c} = 2{,}2 \cdot 10^{-1}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

**Aufgabe 2**

**HÖPPLERsches Kugelfall-Viskosimeter (Statistik und Fehlerabschätzung)**

Die dynamische Viskosität von Flüssigkeiten kann mit dem HÖPPLERschen Kugelfall-Viskosimeter bestimmt werden. Das Meßsystem besteht aus einem schräggestellten Fallrohr, das mit der durchsichtigen Messflüssigkeit gefüllt ist. Im Fallrohr sinkt eine Kugel mit konstanter Geschwindigkeit nach unten. Messgröße ist die Laufzeit der Kugel zwischen den beiden ins Rohr eingravierten Ringmarken.

Die Viskosität bestimmt sich gemäß

$$\eta = K \cdot (\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot t$$

Dabei ist

$K$ Apparatekonstante

$\rho_K$ Dichte der Kugel

$\rho_{Fl}$ Dichte der Flüssigkeit

$t$ Fallzeit der Kugel zwischen den beiden Ringmarken

Die Gerätekontante $K$ soll durch eine Kalibrier-Messung mit der Substanz Glycerin bei $\vartheta = 20\ ^{o}\mathrm{C}$ bestimmt werden. Für Glycerin ist

- die Dichte $\rho(20\ ^{o}\mathrm{C}) = 1{,}261\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ (als fehlerfrei anzunehmen)
- die dynamische Viskosität $\eta(20\ ^{o}\mathrm{C}) = 1480\ \mathrm{mPa \cdot s}$; mit $\Delta\eta = \pm 10\ \mathrm{mPa \cdot s}$ (geschätzt aus Temperaturfehler)

In einem Vorversuch wird für die im Versuch verwendete Ni-Eisen Kugel die Masse zu $m_K = 15{,}123\ \mathrm{g}$ und der Durchmesser zu $D = 15{,}260\ \mathrm{mm}$ bestimmt.

(a) Bestimmen Sie die Dichte der Kugel. Diese soll für die weiteren Betrachtungen vereinfachend als fehlerfrei angenommen werden.

Danach werden in insgesamt 10 Einzelversuchen die Laufzeiten der Kugel zwischen den Ringmarken gemessen. Die Ergebnisse sind

| $\frac{t_i}{\mathrm{min}}$ | 6:31 | 6:37 | 6:38 | 6:40 | 6:42 | 6:34 | 6:37 | 6:39 | 6:43 | 6:39 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Nutzen Sie zur Auswertung der Versuchsergebnisse die Statistik-Funktionen Ihres Taschenrechners.

(b) Bestimmen Sie die Apparatekonstante $K$. Geben Sie die Apparatekonstante in Grundeinheiten des SI-System an.

(c) Bestimmen Sie den relativen und den absoluten Größtfehler der Apparatekonstante $K$.

(d) Geben Sie das Endergebnis mit Fehlergrenzen an.

**Lösung**

(a) für die Dichte der homogenen Ni-Eisen-Kugel erhält man

$$\rho_K = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{m_K}{V_K} = \frac{m_K}{(4/3)\pi R^3} = \frac{15{,}123\ \mathrm{g}}{(4/3)\pi(7{,}63\cdot 10^{-1}\mathrm{cm})^3} = 8{,}128\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$$

Erinnerung: Der Radius einer Kugel ist $R = \frac{D}{2}$

das Volumen einer Kugel ist $V_K = \frac{4}{3}\pi R^3$

(b) Man rechnet die Fallzeiten zweckmäßigerweise auf Sekundenangaben um

| $\frac{t_i}{s}$ | 391 | 397 | 398 | 400 | 402 | 394 | 397 | 399 | 403 | 399 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Man berechnet aus den zehn Messwerten $t_i$ der Laufzeiten den Mittelwert $\bar{t}$ und die Standardabweichung $s_{n-1}$.

Das Statistikprogramm Ihres Taschenrechners liefert dafür

- den arithmetischer Mittelwert: $\bar{t} = \frac{\sum t_i}{10} = 398{,}0\ \mathrm{s}$
- die Standardabweichung: $s_{n-1}(t_i) = 3{,}56\ \mathrm{s}$

der mittlere Fehler des Mittelwerts ergibt sich aus der Standardabweichung zu

$$\Delta\bar{t} = \frac{s_{n-1}(t_i)}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}56\ \mathrm{s}}{\sqrt{10}} = 1{,}13\ \mathrm{s}$$

Aus der Beziehung für die dynamische Viskosität

$$\eta = K\cdot(\rho_K - \rho_{Fl})\cdot t$$

folgt für die Apparatekonstante

$$K = \frac{\eta}{(\rho_K - \rho_{Fl})\cdot\bar{t}}$$

aus den Versuchsergebnissen erhält man

$$K = \frac{\eta}{(\rho_K - \rho_{Fl})\cdot\bar{t}}$$

$$= \frac{1480\ \mathrm{mPa\cdot s}}{(8{,}128 - 1.261)\ \mathrm{g\,cm^{-3}}\cdot 398{,}0\ \mathrm{s}} = \frac{1480\cdot 10^{-3}\mathrm{kg\,m\,s^{-2}\,m^{-2}\cdot s}}{6{,}867\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^{-3}}\cdot 398{,}0\ \mathrm{s}}$$

$$= 0{,}5415\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2\,s^{-2}}$$

Zur Erinnerung bei der Umrechnung der Einheiten: $1\mathrm{Pa} = 1\mathrm{N\,m^{-2}} = 1(\mathrm{kg\,m\,s^{-2}})\,\mathrm{m^{-2}}$

(c) Die Beziehung für die Apparatekonstante

$$K = \frac{\eta}{(\rho_k - \rho_{fl}) \cdot \bar{t}}$$

enthält im Nenner die Differenz der Dichten von Kugel und Flüssigkeit. Berücksichtigte man Fehler in den Dichtebestimmungen, dann bliebe für die Fehlerrechnung nur der mühsame Weg über den mittleren Fehler nach GAUSS – mit seinen partiellen Ableitungen – und die anschließende Berechnung des relativen Fehlers.

Werden vereinfachend die Dichten von Kugel und Flüssigkeit als fehlerfrei angenommen, dann hat man für die Apparatekonstante ein reines Potenzgesetz und man bestimmt in der Fehlerrechnung zweckmäßigerweise zuerst den relativen Größtfehler des Ergebnisses und daraus dann den absoluten Größtfehler.

$$\left|\frac{\Delta K}{K}\right| = \pm\left\{+\left|\frac{\Delta\eta}{\eta}\right| + \left|\frac{\Delta\bar{t}}{\bar{t}}\right|\right\}$$

Berechnung der relativen Fehler der einzelnen Messgrößen

- relativer Größtfehler der dynamischen Viskosität

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{10\ \mathrm{mPa \cdot s}}{1480\ \mathrm{mPa \cdot s}} = 6{,}76 \cdot 10^{-3}$$

- relativer Größtfehler der Kugellaufzeiten

Der relative Größtfehler des Mittelwerts wird

$$\frac{\Delta\bar{t}}{\bar{t}} = \frac{1{,}13\ \mathrm{s}}{398{,}0\ \mathrm{s}} = 2{,}83 \cdot 10^{-3}$$

Zusammengefasst wird damit der Betrag des relativen Größtfehlers

$$\left|\frac{\Delta K}{K}\right| = \pm\left\{\left|\frac{\Delta\eta}{\eta}\right| + \left|\frac{\Delta\bar{t}}{\bar{t}}\right|\right\}$$

$$= \pm(6{,}76 + 2{,}83) \cdot 10^{-3}$$

$$= \pm 9{,}59 \cdot 10^{-3}$$

nach oben gerundet also

$$\left|\frac{\Delta K}{K}\right| = \pm 1{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ oder } 1{,}0\,\%$$

der absolute Größtfehler ergibt sich daraus zu

$$\Delta K = \pm\left|\frac{\Delta K}{K}\right| \cdot K = \pm 9{,}59 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}542 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2\ s^{-2}}$$

$$= \pm 0{,}0052 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2\ s^{-2}}$$

nach oben gerundet also

$\Delta K = \pm 0{,}005 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2\ s^{-2}}$ (angepasst auf die drei gültigen Ziffern von $K$)

(d) Schlussergebnis:

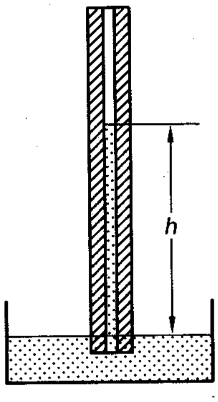
Die Kalibrierung mit der Ni-Eisen-Kugel ergibt für die Apparatekonstante

$$K = (0{,}542 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}$$

$$K = 0{,}542 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}\ (1 \pm 1{,}0\ \%)$$

**Aufgabe 3**

**Oberflächenspannung von Glycerin – Kapillarität**




Benetzende Flüssigkeiten steigen in engen Rohren – gegen die Gravitationskraft – nach oben. Verantwortlich für diese Kapillarwirkung ist die Oberflächenspannung $\sigma$. Experimentell kann die Oberflächenspannung aus der kapillaren Steighöhe; dem Radius der Kapillare, der Dichte der Flüssigkeit und der Fallbeschleunigung bestimmt werden. Es gilt die Beziehung

$$\sigma = \frac{1}{4} D h \rho g$$

Es wurden für Glycerin bei Raumtemperatur folgende Daten gemessen und ihre jeweiligen Fehler abgeschätzt.

| | | |
|---|---|---|
| Steighöhe | $h = 71{,}5\ \mathrm{mm}$ | $\pm 0{,}5\ \mathrm{mm}$ |
| Durchmesser | $D = 0{,}300\ \mathrm{mm}$ | $\pm 0{,}002\ \mathrm{mm}$ |

Aus Tabellenwerken wurde entnommen

| | | |
|---|---|---|
| Dichte | $\rho = 1{,}260\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$ | $\pm 0{,}005\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$ |
| | (geschätzt aus Temperaturfehler) | |
| Fallbeschleunigung | $g = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ | (fehlerfrei angenommen) |

(a) Berechnen Sie aus diesen Messergebnissen die Oberflächenspannung $\sigma$ von Glycerin. Geben Sie Ihr Ergebnis in den SI-Einheiten '$\mathrm{N m^{-1}}$' an.

(b) Berechnen Sie aus den abgeschätzten Fehlern den relativen und den absoluten Größtfehler des Ergebnisses aus Teilaufgabe (a).

(c) Fassen Sie die Resultate aus (a) und (b) zu zwei Endergebnissen mit relativer und absoluter Größtfehlerangabe zusammen.

(d) Gehen Sie den mühsamer Weg der Fehlerfortpflanzung nach GAUSS.

(d1) Berechnen Sie den mittleren Fehler nach GAUSS.

(d2) Berechnen Sie den absoluten Größtfehler nach GAUSS.
Zeigen Sie, dass der mittlere Fehler kleiner ist als der Größtfehler.
Zeigen Sie, dass das Ergebnis mit dem aus Teilaufgabe (b) übereinstimmt.

**Lernziel und Fazit:**

Bei einem reinen Potenzgesetz ist der Rechenweg über den relativen Größtfehler zum absoluten Größtfehler des Ergebnisses der 'Königsweg' und für Labormessungen meist völlig ausreichend.

**Lösung**

Die Beziehung für die Oberflächenspannung lautet

$$\sigma = \frac{D}{4} h\rho g$$

(a) Zweckmäßigerweise rechnet man zuerst sämtliche Einzelmesswerte und ihre jeweils geschätzten Fehler auf SI-Basiseinheiten um.

Steighöhe $h = 71{,}5\ \text{mm} = 71{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$ $\quad \Delta h = 0{,}5\ \text{mm} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$

Durchmesser $D = 0{,}300\ \text{mm}$ Radius $\Delta D = 0{,}002\ \text{mm} = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$

Dichte $\rho = 1{,}260\ \text{g}\,\text{cm}^{-3} = 1{,}260 \cdot 10^{3}\ \text{kg}\,\text{m}^{-3}$

$\Delta\rho = 0{,}005\ \text{g}\,\text{cm}^{-3} = 5{,}0\ \text{kg}\,\text{m}^{-3}$

Damit erhält man für die Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{1}{4} Dh\rho g = \frac{1}{4} \cdot 0{,}300 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot 71{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot 1{,}260 \cdot 10^{3}\ \text{kg}\,\text{m}^{-3} \cdot 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$$

$$= 66{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} = 66{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{N}\,\text{m}^{-1}$$

(b) Die auszuwertende Beziehung für die Oberflächenspannung ist ein reines Potenzgesetz; deshalb kann der relative Größtfehler einfach angegeben werden. Bei der Bestimmung der Zahlenwerte ist es nur wichtig, dass in Zähler und Nenner die gleichen Einheiten stehen; eine Umrechnung in SI-Basiseinheiten ist bei dieser Vorgehensweis entbehrlich. Für den relativen Größtfehler gilt damit

$$\left|\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right| = \pm\left[\left|\frac{\Delta D}{D}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| + \left|\frac{\Delta\rho}{\rho}\right| + \left|\frac{\Delta g}{g}\right|\right]$$

$$= \pm\left[\left|\frac{0{,}002\ \text{mm}}{0{,}300\ \text{mm}}\right| + \left|\frac{0{,}5\ \text{mm}}{71{,}5\ \text{mm}}\right| + \left|\frac{0{,}005\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}}{1{,}260\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}}\right| + \left|\frac{0}{9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}}\right|\right]$$

$$= \pm\left[\frac{2}{300} + \frac{5}{715} + \frac{5}{1260} + 0\right]$$

$$= \pm[6{,}67 + 6{,}99 + 3{,}97] \cdot 10^{-3} = \pm 17{,}63 \cdot 10^{-3}$$

Nach oben gerundet ergibt dies $\left|\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right| = \pm 1{,}8\ \%$

Der absolute Größtfehler wird damit

$$\Delta\sigma_{max} = \left|\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right| \cdot \sigma = \pm 0{,}018 \cdot 66{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{N}\,\text{m}^{-1} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{N}\,\text{m}^{-1}$$

(c) Das Endergebnis der Messung lässt sich damit angeben als

$\sigma = (66 \pm 1) \cdot 10^{-3}\ \text{N}\,\text{m}^{-1}$ $\quad$ oder $\quad$ $\sigma = (66 \cdot 10^{-3}\ \text{N}\,\text{m}^{-1})(1 \pm 2\ \%)$

(d) Der mühsame Weg der Fehlerbestimmung nach GAUSS: Für die Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{1}{4} D h \rho g$$

Nach GAUSS ergibt sich aus den fehlerbehafteten Größen der mittlere Fehler zu

$$f_{\text{Gauss}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial D}\right)^2 (\Delta D)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial h}\right)^2 (\Delta h)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \rho}\right)^2 (\Delta \rho)^2}$$

Es sind die partiellen Ableitungen zu bilden und die Messwerte einzusetzen

$$\frac{\partial \sigma}{\partial D} = \frac{1}{4} h \rho g$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 71{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot 1{,}256 \cdot 10^{3}\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 220{,}3\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial h} = \frac{1}{4} D \rho g$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 0{,}300 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot 1{,}256 \cdot 10^{3}\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 0{,}924\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \rho} = \frac{1}{4} D h g$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 0{,}300 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot 71{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 52{,}61 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3\,s^{-2}}$$

Zusammen mit den abgeschätzten Fehlern ergibt sich für die Terme unter dem Wurzelzeichen

$$\frac{\partial \sigma}{\partial D} \cdot (\Delta D) = 220{,}3\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = 0{,}4406 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\,s^{-2}}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial h} \cdot (\Delta h) = 0{,}924\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}} \cdot 0{,}50 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 0{,}4620 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\,s^{-2}}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \rho} \cdot (\Delta \rho) = 52{,}61 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3\,s^{-2}} \cdot 5{,}0\ \mathrm{kg\,m^{-3}} = 0{,}2631 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\,s^{-2}}$$

Nach quadrieren ergibt sich

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial D}\right)^2 \cdot (\Delta D)^2 = 0{,}1940 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg^2\,s^{-4}}$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial h}\right)^2 \cdot (\Delta h)^2 = 0{,}2134 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg^{-2}\,s^{-4}}$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \rho}\right)^2 \cdot (\Delta \rho)^2 = 0{,}0692 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg^2\,s^{-4}}$$

Die Summe der drei Terme unter der Wurzel wird

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial D}\right)^2 \cdot (\Delta D)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial h}\right)^2 \cdot (\Delta h)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}\right)^2 \cdot (\Delta\rho)^2 = 0{,}4766 \cdot 10^{-6}\ kg^2\, s^{-4} \cdot (m^2 \cdot m^{-2})$$

und schließlich der mittlere Fehler nach GAUSS – *Wurzel aus der Summe der Quadrate*

$$f_{\text{Gauss}} = 1{,}05 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}\,\text{s}^{-2} \cdot (\text{m} \cdot \text{m}^{-1}) = 0{,}6903 \cdot 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1} < f_{\max}$$

Der Größtfehler nach Gauss wird (*Summe der Wurzel aus den einzelnen Termen*)

$$\begin{aligned} f_{\max} &= \left|\left(\frac{\partial\sigma}{\partial D}\right) \cdot (\Delta D)\right| + \left|\left(\frac{\partial\sigma}{\partial h}\right) \cdot (\Delta h)\right| + \left|\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}\right) \cdot (\Delta\rho)\right| \\ &= (0{,}4406 + 0{,}4620 + 0{,}2631) \cdot 10^{-3}\ \text{kg}\,\text{s}^{-2} \cdot (\text{m} \cdot \text{m}^{-1}) \\ &= 1{,}167 \cdot 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1} \end{aligned}$$

Aus dem Größtfehler bestimmt sich der relative Größtfehler zu

$$f_{\text{rel}} = \pm\left|\frac{f_{\max}}{\sigma}\right| = \frac{1{,}17 \cdot 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1}}{66{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1}} = 0{,}0176 \equiv \pm 2{,}6\ \%$$

Diese Ergebnisse stimmen mit der schnellen Rechnung über den relativen Größtfehler bei reinen Potenzgesetzen überein.

## Aufgabe 4

**Fehlerrechnung bei Beziehungen mit Differenzen – Beispiel zu Versuch V 07: Bestimmung des Isentropenexponeten von Luft nach CLEMENT-DESORMES.**

Der Bestimmung des Isentropenexponeten $\kappa$ von Luft nach CLEMENT-DESORMES liegt ein Kreisprozess zugrunde, der durch die folgenden drei speziellen Zustandsänderungen beschrieben wird.

- Isotherme Kompression (bei Raumtemperatur)
- Entspannung in einem adiabaten System (vollständige Wärmeisolierung)
- Isochore Aufwärmung (auf Raumtemperatur)

Differenzdrucke werden – in einer früheren Version des Versuchs – über ein U-Rohr-Manometer, das mit Wasser gefüllt ist bestimmt. Mit einigen Näherungen (über Volumverhältnisse) erhält man ein einfaches Ergebnis für die Bestimmung des Isentropenexponenten (vgl. die Versuchsanleitung V 07).

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$$

In einem Einzelversuch wurden die Drucke $h_1 = 100\,\text{mm WS}$ und $h_2 = 25\,\text{mm WS}$ gemessen. Die Ablesegenauigkeit der Menisken im U-Rohr wurde geschätzt zu $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \pm 1\,\text{mm WS}$.

Dabei steht 'WS' für Wassersäule

Bestimmen sie aus den obigen Angaben für diesen Einzelversuch

(a) den Isentropenexponenten $\kappa$ von Luft,

(b) den mittleren absoluten Fehler nach GAUSS,

(c) den absoluten und relativen Größtfehler.

(d) Geben Sie das Endergebnis mit Fehlergrenzen an.

(e) Vergleichen Sie mit dem theoretisch erwarteten Wert.

**Lösung**

(a) Berechnung des Isentropenexponenten

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2} = \frac{100\ \text{mm}}{(100-25)\ \text{mm}} = 1{,}34$$

(b) Fehlerrechnung

es liegt kein reines Potenzgesetz vor, das die Bestimmung des relativen Fehler einfach gestattet. Zunächst muss nach GAUSS der mittlere absolute Fehler bestimmt werden; anschließend kann mit dem Ergebnis der Teilaufgabe (a) der relative Fehler angegeben werden.

$$\Delta\kappa = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial\kappa}{\partial h_1}\right)^2 (\Delta h_1)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial h_2}\right)^2 (\Delta h_2)^2}$$

Dabei sind in der GAUSSschen Beziehung die beiden Standardabweichungen $s_{h_1}$ und $s_{h_2}$ jeweils durch einen abgeschätzten Fehler $\Delta h_1$ und $\Delta h_2$ ersetzt worden.

Nach GAUSS ergibt sich der Größtfehler $\Delta\kappa_{max}$ .zu

Erinnerung an die Quotientenregel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]. = \frac{v(x)\cdot\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} - u(x)\cdot\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}}{v^2(x)}$

Die partiellen Ableitungen ergeben

$$\frac{\partial\kappa}{\partial h_1} = \frac{(h_1 - h_2)\cdot 1 - h_1}{(h_1 - h_2)^2} = \frac{-h_2}{(h_1 - h_2)^2}$$

$$\frac{\partial\kappa}{\partial h_2} = \frac{(h_1 - h_2)\cdot 0 - h_1\cdot(-1)}{(h_1 - h_2)^2} = \frac{h_1}{(h_1 - h_2)^2}$$

Damit

$$\frac{\partial\kappa}{\partial h_1}\Delta h_1 = \frac{-h_2}{(h_1 - h_2)^2}\Delta h_1 = \frac{-25\ \text{mm}}{(75\ \text{mm})^2}\cdot 1\ \text{mm} = -0{,}44\cdot 10^{-2}$$

$$\frac{\partial\kappa}{\partial h_2}\Delta h_2 = \frac{(h_1)}{(h_1 - h_2)^2}\Delta h_2 = \frac{100\ \text{mm}}{(75\ \text{mm})^2}\cdot 1\ \text{mm} = 1{,}78\cdot 10^{-2}$$

Damit wird der mittlere absolute Fehler nach GAUSS

$$\Delta\kappa = \sqrt{[-0{,}44\cdot 10^{-2}]^2 + [1{,}78\cdot 10^{-2}]^2} = \sqrt{0{,}20\cdot 10^{-4} + 3{,}16\cdot 10^{-4}} = \sqrt{3{,}36\cdot 10^{-4}}$$
$$= 1{,}83\cdot 10^{-2}$$

und der relative Fehler $\frac{\Delta\kappa}{\kappa} = \frac{1{,}83\cdot 10^{-2}}{1{,}34} = 1{,}37\cdot 10^{-2}$

(c) der absolute Größtfehler ergibt sich zu

$$\Delta\kappa_{max} = \pm\left(\left|\frac{\partial\kappa}{\partial h_1}\right|\Delta h_1 + \left|\frac{\partial\iota}{\partial h_2}\right|\Delta h_2\right)$$

Man nimmt die Absolutbeträge und fügt das Doppelvorzeichen plus/minus ein.

$$\Delta\kappa_{max} = \pm\left(\left|-0{,}44\cdot10^{-2}\right| + \left|1{,}78\cdot10^{-2}\right|\right) = \left(0{,}44\cdot10^{-2} + 1{,}78\cdot10^{-2}\right)$$
$$= 2{,}22\cdot10^{-2}$$

Der relative Größtfehler wird damit

$$\frac{\Delta\kappa_{max}}{\kappa} = \frac{2{,}22\cdot10^{-2}}{1{,}34} = 1{,}66\cdot10^{-2}$$

Das Endergebnis wird unter Berücksichtigung des Größtfehlers:

$$\kappa = (1{,}34 \pm 0{,}03)$$
$$\kappa = 1{,}34\ (1 \pm 2\ \%)$$

Die Theorie erwartet für ein zweiatomiges Gas bei Raumtemperatur – Vorraussetzung eines starren Hantelmodells – einen Isentropenexponenten

$$\kappa = 1{,}40$$

Der theoretische Wert liegt also außerhalb der Fehlergrenzen des experimentellen Ergebnisses.

Anmerkung:

Der mittlere absolute Fehler nach GAUSS $\Delta\kappa = 1{,}83\cdot10^{-2}$

ist kleiner als

der absolute Größtfehler $\Delta\kappa_{max} = 2{,}22\cdot10^{-2}$