Anleitung zum Praktikumsversuch

Die Fallbeschleunigung

Untersuchung des freien Falls einer Kugel mit Luftwiderstand

Zusammenfassung

Aus dem freien Fall einer Kugel wird die Fallbeschleunigung ermittelt. Da der Versuch in Luft durchgeführt wird, wirken neben der Schwerkraft auch noch Auftrieb und Luftwiderstand. Zur genaueren Ermittlung von g werden diese Effekte berücksichtigt.

Wichtige Begriffe

Fallbeschleunigung, Auftriebskraft, Luftwiderstand, c_w-Wert

Literatur

Hering, Martin, Stohrer: Physik für Ingenieure, Springer

1 Grundlagen

1.1 Kräfte am frei fallenden Körper

Auf einen in Luft frei fallenden Körper wirken drei verschiedene Kräfte,

die Schwerkraft $F_G = m\ g$,

die Auftriebskraft $F_A = \rho_L\ g\ V$ und

der Luftwiderstand $F_W = \frac{1}{2} c_w\ A\ \rho_L\ v^2$ (turbulente Umströmung).

Hier bedeuten m die Masse, V das Volumen, v die Geschwindigkeit, c_w den Luftwiderstandsbeiwert, A die Anströmfläche des Körpers und ρ_L die Dichte von Luft.

Die momentane Fallbeschleunigung a folgt nach NEWTON aus der Summe der angreifenden Kräfte entsprechend:

(1) $$a = \frac{F_G - F_A - F_W}{m} = g - \frac{\rho_L}{\rho_K} g - c_w \frac{A\ \rho_L}{2\ m} v^2$$

Für eine Kugel mit Radius r beträgt der Anströmquerschnitt $A = \pi\ r^2$ und das Volumen $4\ \pi\ r^3 / 3$. Dies in (1) eingesetzt ergibt

(2) $$a = g\ (1 - \frac{\rho_L}{\rho_K}) - c_w \frac{3\ \rho_L}{8\ r\ \rho_K} v^2$$

Hinweis: Fiele die Kugel in Vakuum aus der Ruhelage, dann reduzierte sich (2) zu

$a(t) = g = const$ (Fallbeschleunigung)

$v(t) = g \cdot t$ (Fallgeschwindigkeit zur Zeit t)

$h(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (Fallhöhe aus der Anfangsposition $h = 0$)

1.2 Auftriebskorrektur

Der Einfluss des Auftriebs kommt in dem konstanten, von der Fallhöhe unabhängigen Korrekturfaktor $(1 - \rho_L/\rho_K)$ in der Gleichung (2) zum Ausdruck, der nur vom Verhältnis der Dichten von Luft und der Kugel abhängt. Für Aluminiumkugeln in Luft erhält man eine Korrektur von lediglich etwa 0,05%. In der folgenden Betrachtung wird der Auftrieb daher vernachlässigt. Erst in Auswertung 4.2 e) wird sein Einfluss berücksichtigt.

1.3 Einfluss des Luftwiderstands

Bereits nach einer Fallhöhe von einigen Zentimetern hat sich eine Strömung mit praktisch konstantem c_W- Wert eingestellt, so dass für die Fallbeschleunigung nach (2) in guter Näherung gilt

(3) $$a = g - b\,v^2 \quad \text{mit} \quad b = c_w \frac{3\,\rho_L}{8\,r\,\rho_K} \quad .$$

Hier und im Folgenden ist *g* die (eventuell auftriebskorrigierte) Schwerebeschleunigung am Ort der Messung. Die Parameter des Luftwiderstandes sind in der Konstanten *b* enthalten, das sind c_W-Wert, das Dichteverhältnis ρ_L/ρ_K und der Kugelradius *r*.

1.4 Ermittlung der zeitabhängigen Fallhöhe mit Luftwiderstand

1.4.1 Geschwindigkeits-Zeit Funktion v(t) mit Luftwiderstand

Wegen des Zusammenhangs $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ ist die Gl. (3) eine Differentialgleichung für $v(t)$:

(4) $$\dot{v} = g - b\,v^2 \quad .$$

Die Lösung $v(t)$ dieser Differentialgleichung lautet für die Anfangsbedingung $v_0 = 0$:

(5) $$v(t) = \sqrt{\frac{g}{b}}\,\tanh(\sqrt{g\,b}\;t)$$ (Lösungsweg: Trennung der Variablen)

<u>Hinweis:</u> Stünde im Versuch eine ausreichend große Fallhöhe für die Kugel zur Verfügung, so könnte der gesamte, in Abb. 1 gezeigte Verlauf der Funktion $v(t)$ verfolgt werden. Demnach stellt sich nach genügend langer Fallzeit eine konstante Fallgeschwindigkeit ein ($v(t \rightarrow \infty) \approx 38$ m/s ≈ 140 km/h). Die resultierende Kraft $F_{res} = F_G + F_A + F_W$ und somit auch die Beschleunigung *a* auf die Kugel ist dann gleich Null geworden.

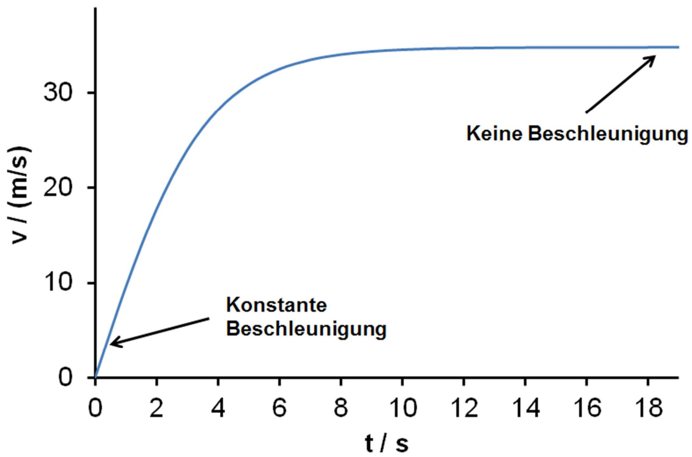

Abb. 1: Geschwindigkeits-Zeit Diagramm bei großer Fallhöhe bzw. langer Fallzeit

1.4.2 Höhen-Zeit Funktion *h*(*t*) mit Luftwiderstand

Integriert man die Geschwindigkeits-Zeit Funktion $v(t)$ ein weiteres Mal, so erhält man die Weg-Zeit Funktion $h(t)$.

(6) $$\int_0^h ds = \int_0^t v(\tau)\, d\tau$$

(7) $$h(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{g}{b}} \tanh(\sqrt{g\, b}\,\tau)\, d\tau$$

bzw.

(8) $$.h(t) = b^{-1} \ln[\cosh(\sqrt{g\, b}\; t)]$$

1.4.3 Abhängigkeit der Fallzeit von der Höhe *t*(*h*) mit Luftwiderstand

Gleichung (8) gibt die Abhängigkeit der Fallhöhe $h(t)$ von der Fallzeit t an. Der benutzten Messmethode besser angepasst ist jedoch die Umkehrfunktion $t(h)$, denn es wird die Fallhöhe h eingestellt und die Fallzeit t mehrmals gemessen. Gleichung (8) nach t aufgelöst ergibt

(9) $$t(h) = \frac{1}{\sqrt{g\, b}} \operatorname{arcosh}(e^{h\, b})$$

1.5 Exakte Berechnung der mittleren Fallbeschleunigung

Aus den Messwerten für die Fallhöhe h und die Fallzeit t kann die mittlere Fallbeschleunigung a_m berechnet werden:

(10) $$a_\mathrm{m} = 2\, h/t^2$$

Theoretisch ergibt sich die Abhängigkeit der mittleren Beschleunigung a_m von der Fallhöhe h aus (9) und (10)

(11) $$a_m(h) = \frac{2\, g\, h\, b}{[\operatorname{arcosh}(e^{h\, b})]^2}$$

1.6 Näherungslösung für a_m mittels Reihenentwicklung

Die Gleichung (11) ist unhandlich und für den Vergleich von Theorie und Experiment wenig geeignet. Die Reihenentwicklung der Funktion $a_m(h)$ in Gl. (11) um den Wert $h = 0$ liefert:

(12) $$a_m(h) = g - \frac{1}{3} g\, b\, h + \frac{1}{15} g\, b^2\, h^2 - \frac{4}{945} g\, b^3\, h^3 - \frac{19}{14175} g\, b^4\, h^4 + ...$$

1.6.1 Lineare Näherung der Abhängigkeit der Fallbeschleunigung von der Fallhöhe mit Luftwiderstand

Die erste Näherung berücksichtigt nur die lineare Abhängigkeit der mittleren Fallbeschleunigung a_m von der Fallhöhe h, also

(13) $$a_m(h) \approx g - \frac{1}{3} g\, b\, h$$

wobei nochmals betont sei, dass g die (eventuell auftriebskorrigierte) Schwerebeschleunigung am Ort der Messung ist. Die exakte Funktion [Gl. (11)] und die Näherungsfunktion [Gl. (13)] sind für große Fallhöhen in Abb. 2 dargestellt.

Man sieht, dass sich die beiden Funktionen für kleine Fallhöhen kaum unterscheiden. Im Aufgabenteil werden Sie später zeigen, dass die relativen Fehler zwischen den exakten Werten nach Gl. (11) und den Näherungswerten nach Gl. (13) bei Fallhöhen $h < 2$ m kleiner als 1% sind.

Die Messwerte im $a_m(h)$-Diagramm dürfen also durch eine Ausgleichsgerade angenähert werden:

(14) $$a_m(h) = a_o + a_1\, h$$

Der Schnittpunkt dieser Geraden $a_m(h)$ mit der a_m-Achse ($h = 0$) liefert die gesuchte Fallbeschleunigung am Messort, also $g = a_0$.

Aus der Steigung $a_1 = -\, g \cdot b/3$ erhält man schließlich den c_w-Wert der Kugel.

Aus (13), (14) und (3) ergeben sich die gesuchten Größen:

(15) $g = a_o$ und $c_w = -\dfrac{8r}{g} \dfrac{\rho_K}{\rho_L} a_1$

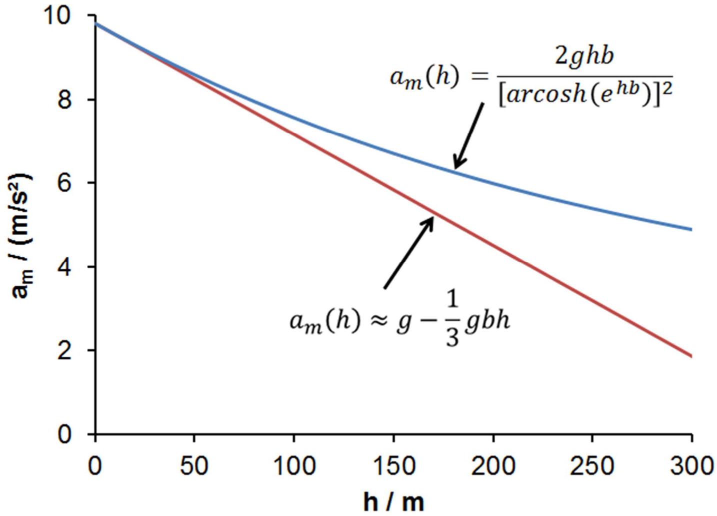

Abb. 2 Mittlere Beschleunigung a_m als Funktion der Fallhöhe h.

2 Messaufbau

Die elektrisch leitende Kugel wird in der Einspannvorrichtung zwischen zwei Kontakten unter Federdruck so gehalten, dass der Eingang A des elektrischen Zählgeräts kurzgeschlossen ist. Durch Drücken der Taste T zieht der Magnet die linke Halterung weg, die Kugel wird mechanisch freigesetzt, und gleichzeitig triggert die Spannung U_K den Zähler. Nach dem Durchfallen der Höhe h unterbricht die Kugel den Lichtvorhang. Dadurch wird ein Impuls ausgelöst, der den Zähler stoppt. Das Gerät zeigt die Fallzeit t an. Die Fallhöhe kann am Maßband abgelesen bzw. eingestellt werden.

Vor Versuchsbeginn muss die korrekte Eichung des Abstandes sichergestellt werden **(zunächst durch Nachfrage beim Betreuer!)**. Die Kalibration der Höhenmessung und damit des Abstandes, bei dem die Lichtschranke anspricht, wird gegebenenfalls **vom Betreuer** durch ein Maß von 20 cm bzw. 50 cm Länge vorgenommen.

Bitte beachten!

- Da die Kugel (aufgrund der Herstellung) nicht ideal rund ist und eher der Form eines Ellipsoids entspricht, sollte man zur Verminderung der Streuung der Messwerte die Kugel immer gleich einspannen, so dass z.B. ein markierter Punkt immer oben ist.
- Vor Auslösen des freien Falls müssen alle Leuchten am Zählgerät, d.h. am **trigger** und am **gate**, aus sein! **Reset** drücken!

3 Aufgaben

Bitte Messprotokoll mit Werte-Tabellen, Einheiten und Abschätzungen der Messunsicherheit für alle Messgrößen anfertigen und am Ende des Labors abzeichnen lassen (Vortestat).

3.1 Ermittlung der mittleren Fallbeschleunigung a_m bei Fall aus 1 m Höhe

Messen Sie 20 mal die Fallzeit aus der Fallhöhe $h = 1$ m und schätzen Sie den Fehler $\pm\Delta h$ der Höhenmessung ab.

3.2 Bestimmung der Schwerebeschleunigung g und des c_W-Werts der Kugel

Wiederholen Sie jeweils 10 mal die Messung der Fallzeit aus vier weiteren, unterschiedlichen Fallhöhen, z.B.: 125, 150, 175, 190 cm.

4 Auswertung

Für jede Messgröße und jedes Ergebnis muss eine Messunsicherheit berechnet und als absoluter und relativer Fehler angegeben werden.

4.1 Ermittlung einer mittleren Fallbeschleunigung a_m beim Fall aus 1 m Höhe

Es sind zu berechnen

- Der arithmetische Mittelwert t_m der Fallzeiten t.
- Die Standardabweichung s_t.
- Der mittlere absolute Fehler Δt und der mittlere relative Fehler $\Delta t / t_m$.
- Die mittlere Fallbeschleunigung $a_m = 2\,h / t_m^2$.
- Der absolute Fehler Δa_m und der relative Fehler $\Delta a_m / a_m$ der mittleren Fallbeschleunigung a_m nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz oder über die Gleichung für den Größtfehler.

Geben Sie das Ergebnis in der Form $a_m \pm \Delta a_m$ an.

4.2 Bestimmung der Schwerebeschleunigung g und des c_W-Werts der Kugel

a.) Berechnung der mittleren Beschleunigungen a_m und der absoluten Fehler Δa_m für sämtliche Fallhöhen

Wiederholen Sie die Schritte zur Berechnung der mittleren Beschleunigung für sämtliche Fallhöhen.

- Der arithmetische Mittelwert t_m der Fallzeiten t.
- Die Standardabweichung s_t .
- Der mittlere absolute Fehler Δt und der mittlere relative Fehler $\Delta t / t_m$.
- Die mittlere Fallbeschleunigung $a_m = 2\,h / t_m^2$.
- Der absolute Fehler Δa_m und der relative Fehler $\Delta a_m / a_m$ der mittleren Fallbeschleunigung a_m nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz oder über die Gleichung für den Größtfehler.

b.) Grafische Darstellung und Ermittlung von Steigung und Achsenabschnitt

Erstellen Sie mit dem MAPLE-Programm LINREG ein Diagramm der mittleren Beschleunigung a_m (mit Angabe der absoluten Fehler Δa_m) gegen die Fallhöhe h.

Ermitteln Sie die Steigung a_1 der Ausgleichsgeraden der Messpunkte sowie den y-Achsenabschnitt a_0.

Das Programm LINREG erlaubt es, die absoluten Fehler Δa_m einzugeben, um die einzelnen Messwerte bei der linearen Regression entsprechend ihrer Unsicherheit zu gewichten (Dadurch erzielt man einen "besseren" Fit). Wahlweise stellt LINREG auch die Option zur Verfügung, die unterschiedlichen Fehlerbalken (Δa_m's) einzuzeichnen, um die Gewichtung auch optisch sichtbar zu machen. Nutzt man diese Option nicht, so sind in jedem Fall die Fehlerbalken von Hand im Diagramm nachträglich einzuzeichnen.

EXCEL kann hier nicht ohne weiteres verwendet werden, da es die Berücksichtigung der absoluten Fehler Δa_m nicht von vorneherein vorsieht. Als Alternative zu LINREG steht allerdings eine EXCEL-Datei mit entsprechend hinterlegten Formeln zur Verfügung.

c.) Ermittlung der Schwerebeschleunigung *g*

Berechnen Sie aus dem Wert a_0 die Größe g und geben Sie sie in der Form $g \pm \Delta g$ an. Die Fehlerabschätzung für Δg lässt sich aus den Ergebnissen der linearen Regression ablesen.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Literaturwert. Bewerten Sie das Ergebnis und diskutieren Sie mögliche systematische Fehler der g-Messung (z.B. Kalibration des Maßstabs, Kalibration der Zeitmessung etc.).

d.) Ermittlung des c_W-Werts

Berechnen Sie aus den Werten a_1 nach Gl. (15) die Größe c_w und geben sie in der Form $c_w \pm \Delta\, c_w$ an. Die Fehlerabschätzung für $\Delta\, c_w$ lässt sich aus den Ergebnissen der linearen Regression herleiten.

Verwenden Sie folgende Werte für die Dichten:

$$\rho_{Al} = 2{,}73 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \qquad \rho_{Luft}(\vartheta = 20°C) = 1{,}20 \text{ kg/m}^3$$

Die Dichten sollen als konstant angenommen werden. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Literaturwert. Bewerten Sie das Ergebnis und diskutieren Sie mögliche Fehler.

e.) Auftriebskorrektur der Schwerebeschleunigung *g*

Korrigieren Sie Ihren Wert für die Schwerebeschleunigung bezüglich des Auftriebs der Kugel nach Abschnitt 1.2. und vergleichen Sie ihn mit dem vom Bundesamt für Kartographie und Geodäsie (*website: gdz.bkg.bund.de*) in der Webanwendung „Schwerewertberechnung" für Esslingen erhaltenen Wert (abgerufen am 20. Nov. 2019) :

$$g_{ES} = (9{,}808714 \pm 0{,}000020)\ \mathrm{m\,/\,s^2}$$

f.) Überprüfung der Güte der benutzten Näherung

Berechnen Sie hierzu die mittlere Fallbeschleunigung a_m mit den Zahlenwerten $h = 2$ m, $b = 8 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^{-1}$ und $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

- einmal nach der exakten Formel (11)
- und dann nach der Näherungsformel (13).
- Beide Zahlenwerte sind miteinander zu vergleichen! Bewerten Sie das Ergebnis.
- Wie groß ist der Unterschied ausgedrückt in Prozent?