

CIB2 / BTB2 / GUB2

Anleitung zum Praktikumsversuch

Stehende Wellen und Helmholtzresonator

Zusammenfassung

Der Versuch besteht aus zwei unabhängigen Teilen. Im ersten Teil werden mit Hilfe eines Motors sichtbare stehende Wellen auf einem gespannten Gummifaden angeregt. Die Spannkraft wird variiert und die jeweils zusammengehörigen Werte für Frequenzen und Wellenlängen gemessen. Die daraus berechneten Werte für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen sind mit den theoretischen Voraussagen zu vergleichen. Im zweiten Teil wird eine Flasche teilweise mit Wasser befüllt und angeblasen. Die sich dabei ergebenden Tonfrequenzen werden in Abhängigkeit vom Füllstand des Wassers gemessen und mit den Theoriewerten für einseitig offene Röhren und Helmholtzresonatoren verglichen. Der Versuch dient insbesondere dazu, Anwendbarkeit und Grenzen physikalischer Modellvorstellungen zu veranschaulichen.

Wichtige Begriffe

Transversal- und Longitudinalwellen, Seilwellen, Schallwellen, Phasengeschwindigkeit, Reflexion, festes und offenes Ende, Überlagerung, stehende Welle, Schwingungsbäuche und -knoten, Grund- und Oberschwingungen, Feder-Masse-System, Helmholtzresonator.

Literatur

- Hering, Martin, Stohrer: Physik für Ingenieure, Springer, 11. Auflage (2012)
Kuypers: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler (Band 2), Wiley VCH, 3. Auflage (2012)

1 Grundlagen

1.1 Schwingungen und Oszillatoren

Schwingungen und Wellen sind miteinander verwandt, aber die beiden Begriffe bezeichnen verschiedene Vorgänge. Beispiele schwingfähiger Systeme, auch als Oszillatoren bezeichnet, sind das mathematische Pendel (Fadenpendel) oder das Feder-Masse-System. Werden sie aus ihrer Ruhelage ausgelenkt, führen sie an einer ganz bestimmten Position im Raum Schwingungen durch. Solange die Amplitude dieser Schwingungen nicht zu groß ist und die Dämpfung während der Beobachtungszeit nicht ins Gewicht fällt, können sie häufig mit harmonischen Funktionen beschrieben werden:

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad \text{oder} \quad x(t) = \hat{x} \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (1)$$

Darin ist $x(t)$ die Auslenkung als Funktion der Zeit t mit den Parametern Amplitude \hat{x} Kreisfrequenz ω und Nullphasenwinkel φ . Die Auslenkungs-Zeit-Funktion $x(t)$ ist die Lösung der Bewegungsgleichung des Oszillators. Für ein ungedämpftes Feder-Masse-System bei kleiner Auslenkung ist das eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = 2\pi f = \sqrt{k/m} \quad (2)$$

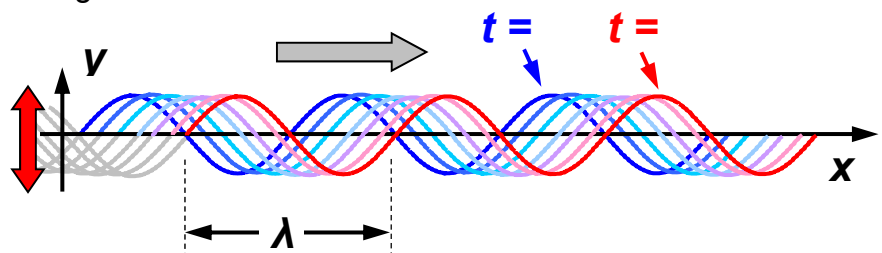
Dabei ist m die schwingende Masse, k die Federkonstante und f die Schwingungsfrequenz.

1.2 Wellengleichung und harmonische Wellen

Werden mehrere benachbarte Oszillatoren miteinander gekoppelt, können sich auf dieser Anordnung Anregungen räumlich ausbreiten. Jeder Festkörper kann als ein solches System betrachtet werden. Das Modell ist aber auch auf Flüssigkeiten und Gase anwendbar. Sind die Anregungen mit der Zeit T periodisch, kommt es zur Ausbreitung von Wellen, deren Auslenkungsmuster sich mit der Wellenlänge λ im Raum wiederholt. Sehr anschaulich ist der Vorgang im Fall eines gespannten Seils. Wird es an einem Punkt periodisch mit der Frequenz $f = 1/T$ auf und ab bewegt, läuft von dort aus ein Wellenzug das Seil entlang.

Abbildung 1

In positive x-Richtung laufende Seilwelle zu verschiedenen Zeitpunkten (schematisch)



Im einfachsten Fall erfolgt die Anregung harmonisch. Dann können die entstehenden Seilwellen ebenfalls mit harmonischen Wellenfunktionen beschrieben werden:

$$y_R(x,t) = \hat{y} \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi) \quad \text{Welle läuft in positive } x\text{-Richtung} \quad (3a)$$

$$y_L(x,t) = \hat{y} \cos(\omega \cdot t + k \cdot x + \varphi) \quad \text{Welle läuft in negative } x\text{-Richtung} \quad (3b)$$

Hier ist $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz der Anregung und $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl der Seilwelle. Gemäß der Konvention werden Wellen mit Cosinus-Funktionen beschrieben, die Verwendung von Sinus-Funktionen wäre mathematisch aber ebenfalls möglich. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit c - genauer für die Phasengeschwindigkeit - von Wellen gilt immer der Zusammenhang von Frequenz f und Wellenlänge λ :

$$c = f \cdot \lambda \quad (4)$$

Wellenfunktionen sind Lösungen der partiellen Differentialgleichung (Wellengleichung):

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \quad (5)$$

Wird ein Seil der Querschnittsfläche A mit der Kraft F gespannt, dann folgt c aus:

$$c = \sqrt{\frac{F}{A\rho}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (6)$$

Hier ist ρ die Dichte des Materials. Oft erfolgt die Charakterisierung des Seils durch Angabe der *Massenbelegung* μ - also der Masse pro Längeneinheit - in der Einheit kg/m.

Wellenausbreitung bedeutet Energietransport. Quantifiziert wird dieser Transport durch die physikalische Größe Intensität S . Sie repräsentiert die transportierte Energie pro Fläche und Zeit und wird in der Einheit $[S] = \text{W} / \text{m}^2$ angegeben.

1.3 Reflexion und Überlagerung

Trifft eine Welle auf eine Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Materialien, wird sie im allgemeinen in zwei Anteile aufgeteilt. Ein Anteil tritt in das andere Material über, ein zweiter wird zurück reflektiert. Welche Intensitäten der reflektierte und der durchtretende Anteil der Welle haben, hängt von Dichte und Elastizität der Materialien ab.

Im Extremfall wird die Welle vollständig zurück reflektiert. Ein Beispiel dafür ist eine Schallwelle in Luft, die auf eine harte Wand trifft. An der Grenzfläche erfolgt keine

Auslenkung der schwingenden Gasmoleküle. Hier liegt ein sogenanntes *festes Ende* vor, an dem sich ein Schwingungsknoten ausbildet. Der reflektierte Wellenteil weist einen Phasensprung von π (beziehungsweise 180°) relativ zur einfallenden Welle auf.

Auch bei Auftreffen einer in einem sehr dichten Medium laufenden Welle auf die Grenzfläche zu einem Material geringer Dichte erfolgt eine praktisch vollständige Reflexion der Intensität. In diesem Fall können sich aber die Teilchen an der Grenzfläche bewegen. Es liegt ein sogenanntes *offenes Ende* vor, an dem sich ein Schwingungsbauch bildet. Hier tritt bei der Reflexion kein Phasensprung relativ zur einfallenden Welle auf.

Reflexion an der Grenzfläche zwischen zwei Materialien ergibt durch Überlagerung immer eine stehende Welle mit Schwingungsknoten und –bäuchen im Abstand $\lambda/2$.

Abbildung 2

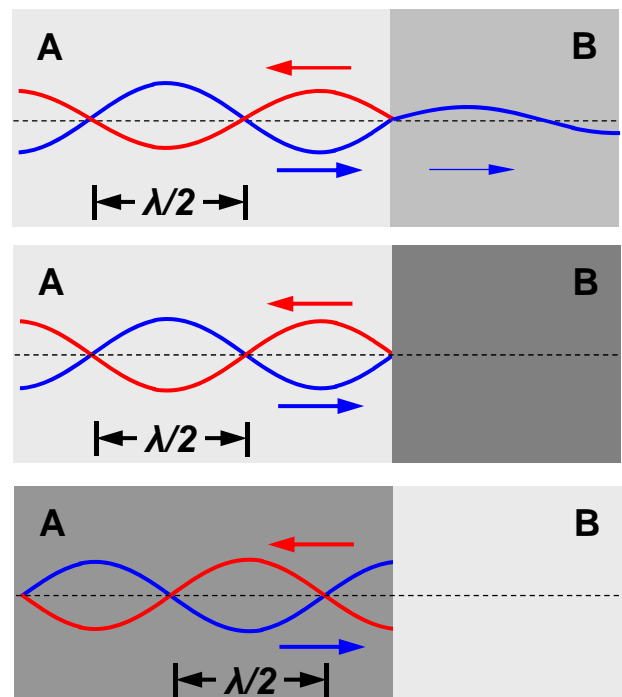
Reflexion einer Welle an der Grenzfläche zwischen den Materialien A und B.

Oben: Allgemeiner Fall, ein Teil der Welle tritt durch die Grenzfläche, ein zweiter wird reflektiert

Mitte: Das Material B hat eine viel höhere Dichte als Material A, es ergibt sich eine vollständige Reflexion mit einem **Schwingungsknoten** an der Grenzfläche

Unten: Das Material A hat eine viel höhere Dichte als Material B, es ergibt sich eine vollständige Reflexion mit einem **Schwingungsbauch** an der Grenzfläche

Der Knotenabstand der sich ausbildenden stehenden Welle beträgt jedesmal $\lambda/2$



1.4 Stehende Seilwellen

An einer beidseitig eingespannten Saite, einem Gummifaden oder einem Seil lassen sich stehende Transversalwellen sehr gut beobachten. An den festen Enden bilden sich dabei immer die Knoten aus. Dazwischen treten bei geeigneten Anregungsfrequenzen ein oder mehrere Schwingungsbäuche auf. Die niedrigste mögliche Frequenz f_1 wird oft als Grundfrequenz bezeichnet, darüber liegen die Oberfrequenzen f_2, f_3, f_4, \dots

Die Grundfrequenz f_1 folgt mit dem Zusammenhang $c = f \cdot \lambda = f_1 \cdot \lambda_1$ aus der Bedingung

$$L = 1 \frac{\lambda_1}{2} \quad \text{also} \quad f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{2L} \quad (7)$$

Die erste Oberwelle schwingt bei der Oberfrequenz f_2 , diese folgt analog aus

$$L = 2 \frac{\lambda_2}{2} \quad \text{also} \quad f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = 2 \frac{c}{2L} \quad (8)$$

Dies lässt sich verallgemeinern. Die Oberfrequenz f_n ergibt sich aus

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad \text{also} \quad f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2L} = n \cdot f_1 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

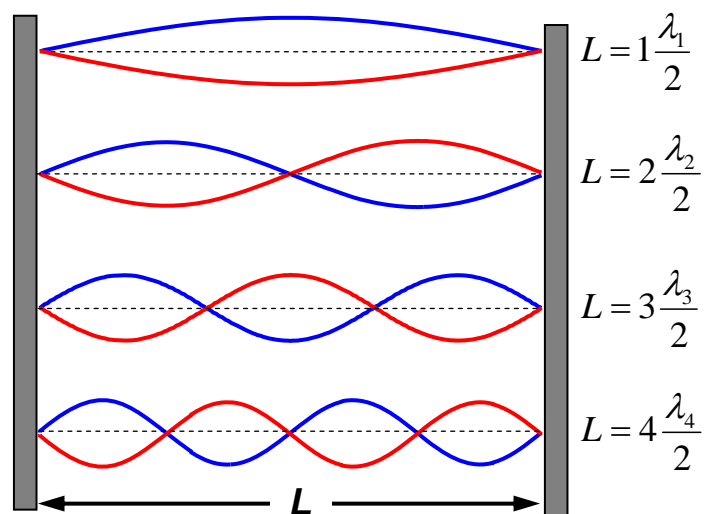
Hinweis: Die Grundfrequenz f_1 wird im angelsächsischen Raum als „1. Harmonische“ bezeichnet, die Oberfrequenzen f_2 und f_3 entsprechend als „2. Harmonische“, „3. Harmonische“ ... Im europäischen Raum spricht man dagegen meistens von „Grundschwingung“ und „1. Oberschwingung“, „2. Oberschwingung“, „3. Oberschwingung“, ... , oft wird auch die Grundfrequenz mit f_0 und die Oberfrequenzen entsprechend mit f_1, f_2, f_3, \dots bezeichnet.

Abbildung 3

Stehende Transversalwellen auf einer beidseitig eingespannten Saite.

Oben: Grundschwingung der Wellenlänge λ_1 und Grundfrequenz f_1 (oft als 1. Harmonische bezeichnet)

Darunter die 1., 2. und 3. Oberschwingung (oft auch 2., 3. und 4. Harmonische) mit den Wellenlängen λ_2, λ_3 und λ_4 . Sie schwingen mit den zugehörigen Oberfrequenzen f_2, f_3 und f_4 .



1.5 Schallwellen

Schallwellen sind longitudinale Druckwellen (Kompressionswellen) in elastisch kompressiblen Medien. Sie breiten sich in Luft und Gasen, in Flüssigkeiten (Wasserschall) und in Festkörpern aus (Körper- und Gebäudeschall) und ergeben Dichteschwankungen um einen Gleichgewichtswert. Die Klassifikation erfolgt anhand ihrer Frequenz:

- Hörbereich: $20 \text{ Hz} < f < 20 \text{ kHz}$
- Infraschall: $f < 20 \text{ Hz}$ (Beispiel: Erdbebenwellen)
- Ultraschall: $f > 20 \text{ kHz}$ (Beispiel: Sonographie, Materialprüfung, Reinigungsbäder)

Die Schallgeschwindigkeit c in Gasen folgt aus

$$c = \sqrt{\kappa R_i T} = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} R_i T} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} \quad \text{mit} \quad R_i = \frac{R}{M} \quad (10)$$

R_i : spezifische Gaskonstante T : absolute Temperatur
 R : molare Gaskonstante c_p : Wärmekapazität bei konstantem Druck
 κ : Isentropenexponent c_v : Wärmekapazität bei konstantem Volumen
 p, ρ : Druck und Dichte M : Molmasse

Für konstante Temperatur ist $p \sim \rho$, bei Druckänderungen bleibt daher die Schallgeschwindigkeit c konstant. Mit steigender Temperatur nimmt c dagegen zu, denn es gilt $c \sim \sqrt{T}$.

Geschwindigkeit longitudinaler Schallwellen in Gasen (nach: Hütte 2004)

Medium	Schallgeschwindigkeit	$c / \frac{m}{s}$
Luft (Normtemperatur 0°C)	332	
Luft (Raumtemperatur 20°C)	344	
Wasserstoff	1286	
Helium	971	
Sauerstoff	315	

1.6 Stehende Schallwellen in Röhren und Pfeifen

Wie alle anderen Wellen können sich Schallwellen auch zu stehenden Wellen überlagern. Dies ist zum Beispiel in Pfeifen und Röhren zur Erzeugung von Frequenzen im Hörbereich der Fall. Man unterscheidet beidseitig offene / geschlossene und einseitig geschlossene Anordnungen. Zur besseren Visualisierung solcher longitudinaler Wellen werden in schematischen Darstellungen Auslenkung und Geschwindigkeit (Schnelle) der schwingenden Teilchen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle gezeichnet.

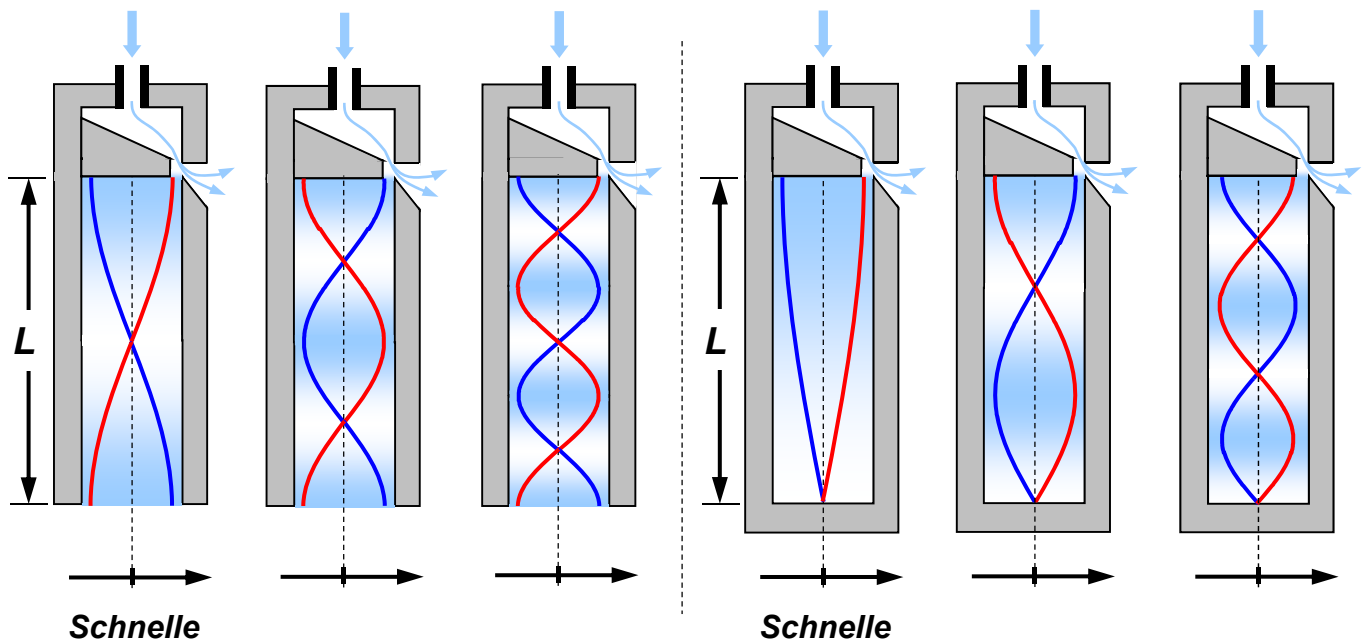


Abbildung 4

Longitudinale stehende Wellen in Orgelpfeifen. Eingeblassene Luft strömt über eine Schneide. Die dabei entstehenden Turbulenzen regen die Luftsäule in der Pfeife zu Wellenbewegungen an. Die schematische Skizze zeigt die Verhältnisse bei Erzeugung der Grundfrequenz sowie der ersten beiden Oberfrequenzen.

Links : beidseitig offene Pfeife (zwei offene Enden).

Rechts : einseitig geschlossene oder „gedackte“ Pfeife (ein offenes, ein festes Ende).

Die Grundfrequenz f_1 einer beidseitig offenen mit Luft oder Gas gefüllten Röhre kann analog zu der Betrachtung im Fall der beidseitig eingespannten Saite berechnet werden. Auf die Länge L der Röhre entfällt dabei eine halbe Wellenlänge der stehenden Welle. Aus der Verallgemeinerung folgen dann entsprechend die zugehörigen Oberfrequenzen f_n .

$$L = 1 \frac{\lambda_1}{2} \quad \text{also} \quad f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{2L} \quad (11)$$

und allgemein
$$f_n = n \cdot \frac{c}{2L} = n \cdot f_1 \quad (12)$$

Die Schwingungsfrequenzen in einer einseitig geschlossenen Röhre ergeben sich zu

$$f_n = (2n - 1) \cdot \frac{c}{4L} = (2n - 1) \cdot f_1 \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (13)$$

Dabei ist in beiden Fällen c die Schallgeschwindigkeit in der Röhre.

1.7 Flaschenblasen

Im zweiten Teil des Versuchs werden Töne durch Anblasen einer Flasche erzeugt. Als einfachstes Modell zur Berechnung der dabei auftretenden Tonfrequenzen liegt es nahe, diese näherungsweise als einseitig offenes, zylindrisches Rohr der Länge L aufzufassen, wobei die Länge L der Höhe der Luftsäule in der – unter Umständen noch teilweise gefüllten - Flasche entspricht. Zur Berechnung kann dann einfach die Beziehung (13) für die einseitig geschlossene Röhre (beziehungsweise gedackte Orgelpfeife) verwendet werden.

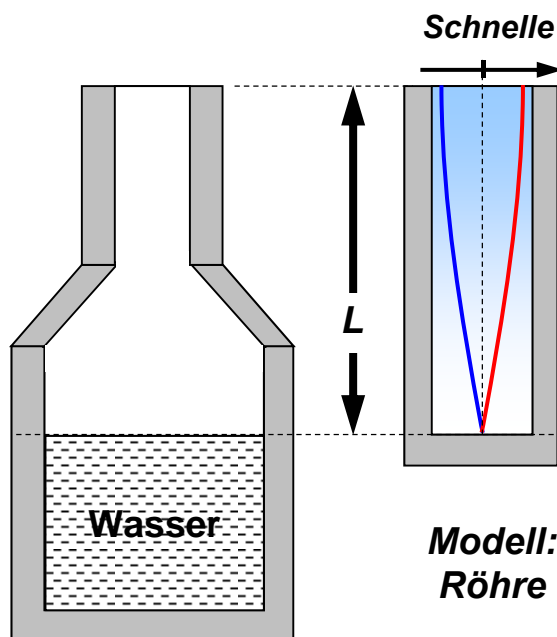


Abbildung 5

Einfachste Modellvorstellung zur Berechnung der bei Anblasen einer teilweise mit Wasser gefüllten Flasche auftretenden Schwingungsfrequenz :

- Einseitig geschlossene Röhre der Länge L
- Welle schwingt mit Grundfrequenz f_1

1.8 HELMHOLTZ-Resonator

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung der Vorgänge in der angeblasenen Flasche ist das Modell des HELMHOLTZ-Resonators. Hier wird die Anordnung als Feder-Masse-System betrachtet. Die Luft im Flaschenhals ist die schwingende Masse, die sich in der Art eines Kolbens im Flaschenhals bewegt. Dadurch wird das Luftvolumen im Korpus der Flasche je nach Bewegungsrichtung dieses „Kolbens“ komprimiert oder expandiert. Die resultierende Druckänderung ergibt die auf den „Kolben“ wirkende Rückstellkraft.

Das Luftvolumen V_0 bildet somit die Feder dieses Feder-Masse-Systems, Veränderung des Volumens durch teilweises Befüllen der Flasche resultiert in einer Änderung der Federkonstante dieser Gasfeder. Im Prinzip liegt also ein Oszillator vor. Anblasen der Flasche regt diesen zu erzwungenen Schwingungen mit der Resonanzfrequenz f_{res} an:

$$f_{res} = \frac{c}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{A_H}{V_0 \cdot L_H}}$$

$$\begin{aligned} f_{res} &: \text{Resonanzfrequenz} \\ A_H &: \text{Halsquerschnitt} \\ L_H &: \text{Halslänge} \\ c &: \text{Schallgeschwindigkeit} \\ V_0 &: \text{Luftvolumen im Korpus} \end{aligned} \quad (14)$$

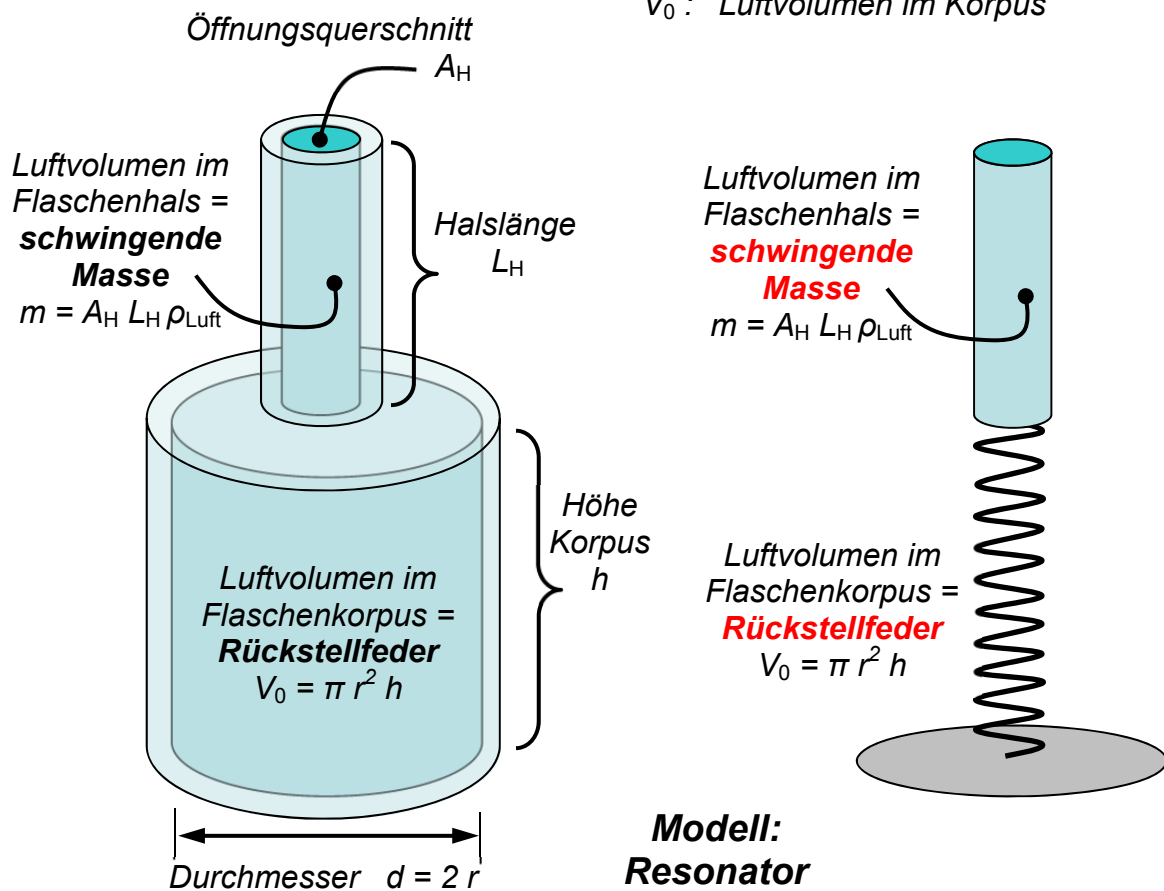


Abbildung 6 Verbesserte Modellvorstellung HELMHOLTZ-Resonator

Die Resonanzfrequenz hängt von der Flaschengeometrie und der Schallgeschwindigkeit c ab. Im Versuch wird das freie Luftvolumen V_0 durch Befüllen mit Wasser verändert. Eine Auftragung von f_{res} gegen $1/\sqrt{V_0}$ sollte eine Gerade der Steigung m ergeben

$$f_{res} = f_{res}(V_0) = m \frac{1}{\sqrt{V_0}} \quad \text{mit} \quad m = \frac{c}{2 \pi} \sqrt{\frac{A_H}{L_H}} \quad (15)$$

Umgekehrt ist die Steigung m dieser Geraden ein Maß für die Länge des im Flaschenhals schwingenden Luftzylinders. Dieser wird nicht in jedem Fall die geometrische Länge L_H des Flaschenhalses haben. Die Verwendung einer effektiven Länge L_{eff} anstelle der geometrischen Halslänge L_H in Gleichung (16) wird daher in der Regel eine bessere theoretische Voraussage der Messwerte ergeben. Im Versuch wird die effektive Halslänge L_{eff} aus der Steigung m der durch die Messwerte gelegten Ausgleichsgeraden berechnet:

$$L_{\text{eff}} = \frac{c^2}{4\pi^2} \cdot \frac{A_H}{m^2} = \frac{c^2 d^2}{16\pi} \cdot \frac{1}{m^2} \quad \begin{array}{l} d : \text{Innendurchmesser Mündung} \\ m : \text{Steigung Ausgleichsgerade} \end{array} \quad (16)$$

1.9 Systematische Korrekturen der Modelle

Die effektive Länge ist eine nach der Messung aus den Daten ermittelte Größe. Um die einfachen Modellvorstellungen „Röhre“ und „Helmholtzresonator“ im Ansatz zu verbessern, wurden sie um das Konzept der akustisch wirksamen Länge L_{ak} erweitert. Sie ist in beiden Fällen jeweils höher als die geometrische Länge L bzw. L_H zu veranschlagen. Empirisch gewonnene Abschätzungen für L_{ak} als Funktion des Mündungsdurchmessers d sind:

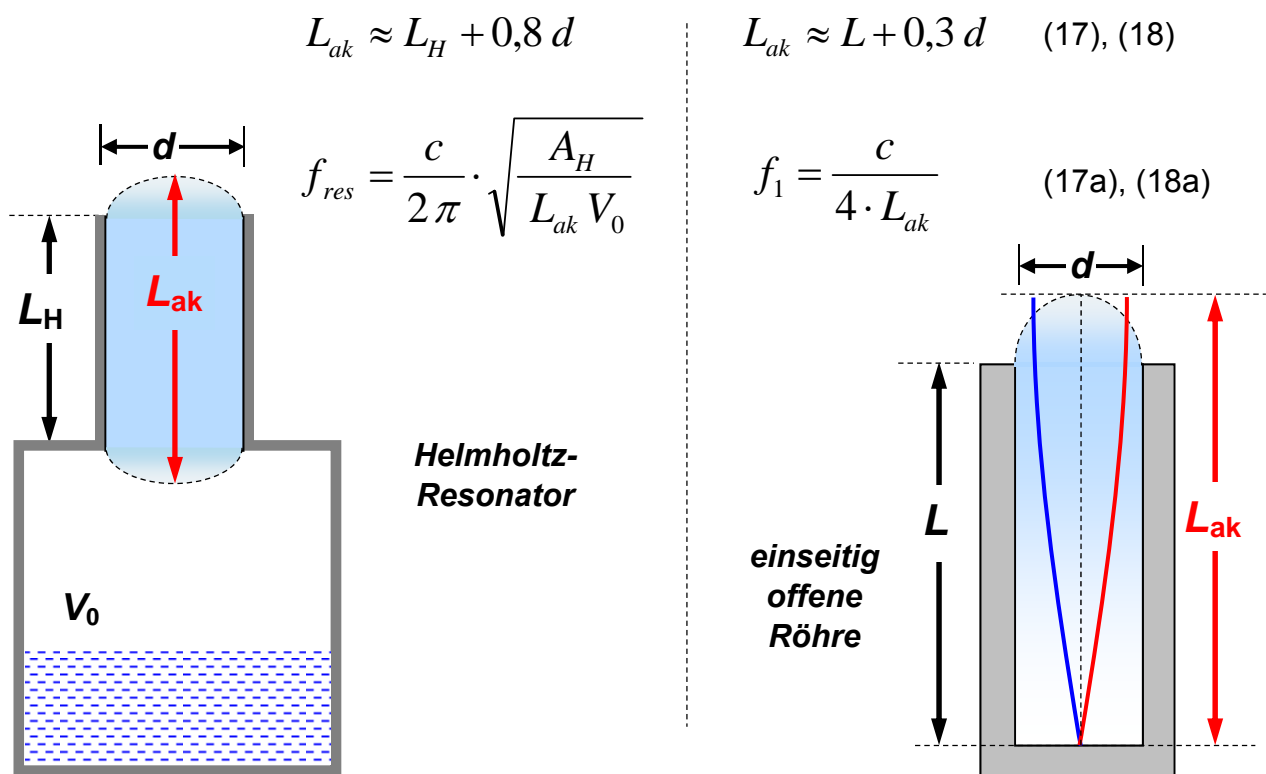


Abbildung 7 Geometrische Längen L und L_H sowie akustische Längen L_{ak}

1.10 Modellparameter in der Zusammenfassung

Bei Verwendung der **Modellvorstellung** des Helmholtzresonators zur Berechnung der mit der Flasche erzeugten Tonfrequenzen sind demnach drei unterschiedliche Längen in Betracht zu ziehen:

- (a) die geometrische Halslänge L_H
- (b) die akustische Länge L_{ak}
- (c) die effektive Halslänge L_{eff}

Um zu ermitteln, welche die Messung am besten beschreibt, werden zur Auswertung alle berechnet. Die Ergebnisse werden verglichen (welche Abmessungen hatte die verwendete Flasche ?) und die optimale Beschreibung ermittelt.

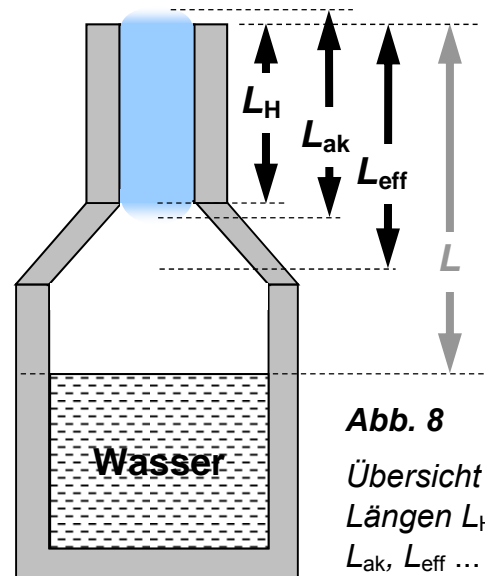


Abb. 8
Übersicht :
Längen L_H ,
 L_{ak} , L_{eff} ...

2 Messaufbau

- Seilwellen: Gummifaden, Netzteil und Motor zur Wellenanregung, Halterung mit Gewichtsstücken zum Spannen des Gummifadens, Frequenzmessgerät.
- Flaschenblasen: Flaschen, Mikrofon mit Verstärker und Frequenzmessgerät

3 Aufgaben

Bitte Messprotokoll mit Werte-Tabellen, Einheiten und Abschätzungen der Messunsicherheit für alle Messgrößen anfertigen und am Ende des Labors abzeichnen lassen (Vortestat).

3.1 Gummifaden

Messen Sie Länge L und Masse m des Gummifadens (Einzelmessung).

3.2 Stehende Wellen

Um den Gummifaden zu spannen, stehen verschiedene mit Sand gefüllte Flaschen als angehängte Gewichte zur Verfügung. Ermitteln Sie die Masse eines dieser Gewichte und führen die folgende Messreihe durch: Erhöhen Sie langsam die Anregungsfrequenz des Motors, bis sich eine stehende Welle, die Grundschiwingung, ausbildet. Messen Sie die zugehörigen Werte für Frequenz und Wellenlänge jeweils dreimal. Erhöhen Sie

dann die Anregungsfrequenz und ermitteln Sie in gleicher Weise Frequenz und Wellenlänge für alle auftretenden Oberschwingungen einschließlich der dritten Oberschwingung. Führen Sie die gleiche Messreihe mit zwei weiteren Gewichten durch.

3.3 Flaschenblasen

Wählen Sie eine der zur Verfügung stehenden Flaschen für das Experiment aus und ermitteln Sie den inneren Durchmesser ihrer Öffnung sowie ihre Halslänge. Befüllen Sie die Flasche bis zum Halsansatz mit Wasser. Stellen Sie ein bestimmtes Luftvolumen V_0 durch Ausgießen des Wassers in einen Messzylinder ein und messen Sie die Höhe L der Luftsäule vom Wasserspiegel bis zur Flaschenmündung. Blasen Sie dann über den Flaschenrand, bis ein satter Ton entsteht. Die Frequenz dieses Tones wird als Mittelwert aus 5 Einzelmessungen mit dem Frequenzmessaufbau bestimmt (nahe ans Mikrofon herangehen). Wiederholen Sie die Messungen für insgesamt drei verschiedene Füllhöhen.

4 Auswertung

Für jede Messgröße und jedes Ergebnis muss eine Messunsicherheit berechnet und als absoluter und relativer Fehler angegeben werden.

4.1 Gummifaden

Berechnen Sie die Massenbelegung des Gummifadens in entspanntem und gespanntem Zustand.

4.2 Stehende Wellen

(a) Berechnen Sie für die drei verschiedenen Werte der Spannkraft jeweils die nach der Theorie zu erwartende Ausbreitungsgeschwindigkeit c_{theo} der Welle. Berücksichtigen Sie dabei die Variation der Massenbelegung μ in Abhängigkeit der Spannkraft und ermitteln Sie realistische Fehlergrenzen!

(b) Berechnen Sie für jede der beobachteten stehenden Wellen jeweils die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_{exp} der Welle aus den Messwerten für Wellenlänge und Frequenz. Bilden Sie jeweils den Mittelwert aus allen Einzelmessungen und ermitteln Sie auch hier die Fehlergrenzen (Statistik).

(c) Vergleichen Sie die jeweiligen Werte für c_{exp} und c_{theo} . Stimmen sie im Rahmen der Messgenauigkeit überein? Welche Messmethode für die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist genauer? Begründen Sie Ihre Einschätzung!

4.3 Flaschenblasen

(a) Für jede Füllhöhe sind folgende Werte zu berechnen:

- 1) Freies Luftvolumen V_0 in der Flasche
- 2) Frequenz der stehenden Welle nach dem einfachen Röhrenmodell
- 3) Frequenz der Schwingung für einen Helmholtzresonator mit der Halslänge L_H

(b) Vergleichen Sie die Messwerte (Mittelwerte) mit den theoretischen Werten der beiden verschiedenen Modelle. Welches davon stimmt besser mit der Messung überein?

(c) Tragen Sie die gemessenen Frequenzen so in einem Diagramm gegen das freie Volumen V_0 auf, dass sich im Fall der Gültigkeit des Helmholtzmodells eine Gerade ergeben sollte und überprüfen Sie damit die Anwendbarkeit dieser Theorie.

(d) Zeichnen Sie eine Ausgleichsgerade durch die Messpunkte und ermitteln Sie aus deren Steigung die effektive Halslänge L_{eff} der verwendeten Flasche. Ermitteln Sie die Fehlergrenzen aus der Grafik.