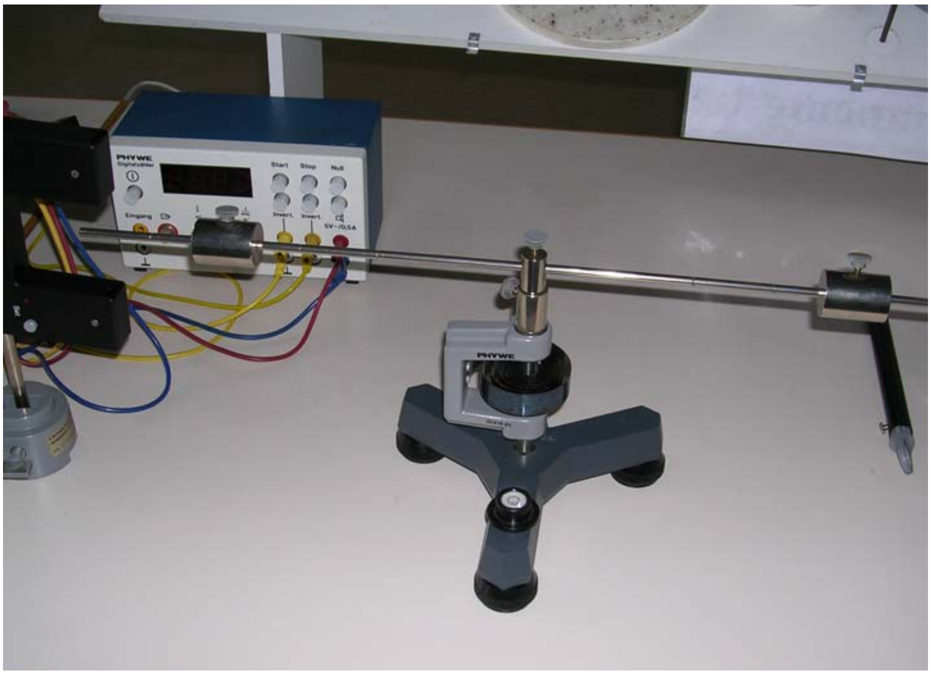
Anleitung zum Praktikumsversuch

CIB2 / BTB2 / GUB2

Massenträgheitsmoment



Zusammenfassung

Das Massenträgheitsmoment einer Reihe verschiedener Körper wird experimentell aus Drehschwingungen ermittelt und mit den jeweils nach der Theorie berechneten Werten verglichen. Zusätzlich wird exemplarisch für einen Körper die Auswirkung einer Verschiebung der Drehachse relativ zum Schwerpunkt untersucht.

Wichtige Begriffe

Drehmoment, Massenträgheitsmoment, Schwerpunkt, Drehfederkonstante (Winkelrichtgröße), Periode, Schwingungsdauer, harmonische Schwingung, Satz von Steiner

Literatur

Hering, Martin, Stohrer:	Physik für Ingenieure, Springer
Gerthsen :	Physik, Springer

1 Grundlagen

1.1 Massenträgheitsmoment

Das Massenträgheitsmoment J ist eine fundamentale Größe zur Beschreibung der mechanischen Eigenschaften rotierender Körper. Sie ist immer auf eine Drehachse bezogen und als Integral über das gesamte Volumen des Körpers zu berechnen:

$$J = \int_{Vol} r^2 \mathrm{d}m \tag{1}$$

Dabei ist r der (senkrechte) Abstand des Massenelements dm von der Drehachse. Ist J_S das Massenträgheitsmoment eines Körpers mit der Masse m bezogen auf eine Achse durch seinen Schwerpunkt S, dann gilt nach STEINER

$$J_\mathrm{A} = J_\mathrm{S} + m\,a^2 \tag{2}$$

Hier ist J_A das Massenträgheitsmoment des Körpers bezüglich einer Achse, die im Abstand a parallel zur erstgenannten Schwerpunktachse verläuft.

1.2 Drehschwingungen

Im Versuch werden Massenträgheitsmomente experimentell aus Drehschwingungen bestimmt. Besonders einfach wird deren Auswertung bei Vorliegen eines linearen Gesetzes für den Zusammenhang zwischen Drehwinkel β und rückstellendem Drehmoment $M_\mathrm{Rück}$ entsprechend (3), k_t ist dabei die sogenannte Drehfederkonstante:

$$M_\mathrm{Rück} = -k_\mathrm{t} \cdot \beta \tag{3}$$

Dann liegt eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsdauer T_0 vor:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\mathrm{A}}{k_\mathrm{t}}} \quad . \tag{4}$$

Bei bekannter Drehfederkonstante k_t der rückstellenden Feder kann hier das Massenträgheitsmoment J_A über eine Messung der Schwingungsdauer T_0 bestimmt werden:

$$J_\mathrm{A} = k_\mathrm{t} \cdot T_0^2 \big/ (4 \cdot \pi^2) \tag{5}$$

2 Messaufbau

Der Aufbau besteht aus einem Stativ mit einer drehbar gelagerten Aufnahme für einen dünnen Metallstab. Die Aufnahme wird nachfolgend als Drillachse bezeichnet. Auf den Stab können in frei wählbarem Abstand *r* zur Rotationsachse zwei dickwandige Hohlzylinder aus Metall aufgeschraubt werden. Die Spiralfeder ergibt bei Auslenkung aus der Ruhelage ein vom Auslenkungswinkel β abhängiges rückstellendes Drehmoment.

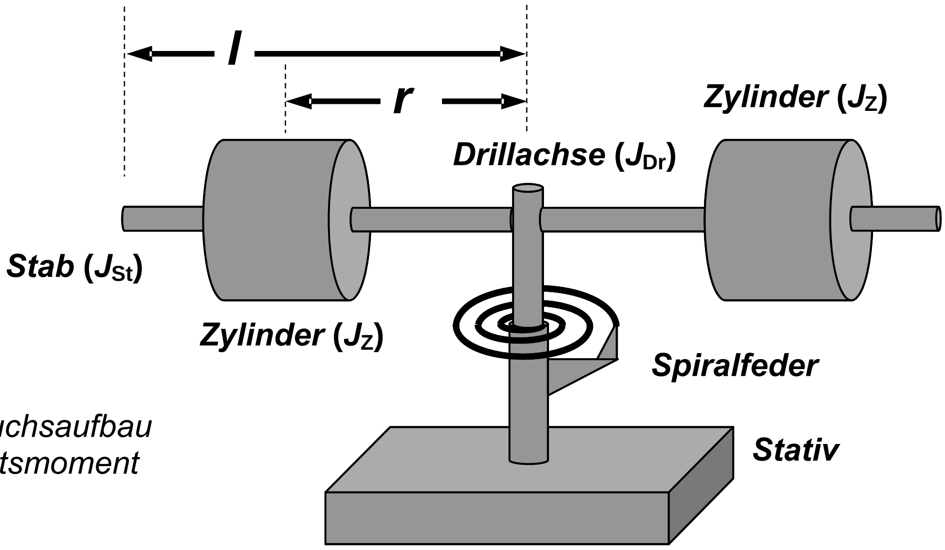


***Abb. 1**: Versuchsaufbau Massenträgheitsmoment (schematisch)*

Schwingungsdauer

Die verschiebbaren Zylinder haben gleiche Abmessungen und Massen m_Z. Sie werden symmetrisch im Abstand *r* zur Drehachse auf dem Stab befestigt. Das gesamte Massenträgheitsmoment J_{ges} der Anordnung ist die Summe der Massenträgheitsmomente des Stabs (J_{St}), der beiden Zylinder (J_Z) und der Drillachse (J_{Dr}):

$$J_{ges} = J_{St} + J_{Dr} + 2\left(J_Z + m_Z\, r^2\right) = J_0 + 2\, m_Z r^2 \qquad (6)$$

Dabei folgt der Anteil der beiden Zylinder aus dem Satz von Steiner (2). Bezüglich einer vertikalen Achse durch ihren Schwerpunkt haben sie das Massenträgheitsmoment J_Z. Da sie sich im Abstand *r* zur Drehachse befinden ist dazu noch $m_Z \cdot r^2$ zu addieren.

Die von *r* unabhängigen Anteile lassen sich zu der Hilfsgröße J_0 zusammenfassen.

$$J_0 = J_{St} + J_{Dr} + 2\, J_Z \qquad (7)$$

Sie ist die Summe der Massenträgheitsmomente aller beteiligten Körper bezüglich einer gemeinsamen Achse, die durch ihre Schwerpunkte läuft. Im Experiment lässt sie sich **nicht** einstellen, da die beiden Zylinder nicht übereinander geschoben werden können.

Für zwei verschiedene Schwerpunktabstände r_1 und r_2 von der Drehachse ergeben sich die beiden Drehschwingungsdauern T_1 und T_2. Nach den Gleichungen (4) und (6) folgt:

$$T_1^2 = 4\,\pi^2 \cdot \frac{J_0 + 2m_Z r_1^2}{k_t} \qquad T_2^2 = 4\,\pi^2 \cdot \frac{J_0 + 2m_Z r_2^2}{k_t} \tag{8}$$

Differenzbildung und Elimination von J_0 ergibt die Drehfederkonstante k_t zu:

$$k_t = 8\,\pi^2 m_Z \cdot \frac{r_1^2 - r_2^2}{T_1^2 - T_2^2} \tag{9}$$

3 Aufgaben

Bitte Messprotokoll mit Werte-Tabellen, Einheiten und Abschätzungen der Messunsicherheit für alle Messgrößen anfertigen und am Ende des Labors abzeichnen lassen (Vortestat).

3.1 Statische Bestimmung der Drehfederkonstante $k_{t,stat}$

Der dünne Stab wird in die Drillachse eingesetzt. Zur Messung ist der Federkraftmesser in die in den Stab eingearbeiteten Nuten einzuhaken. Die für eine Verdrillung der Achse um die Winkel φ = -2π, -π, π und 2π erforderlichen Tangentialkräfte werden bestimmt.

Die Messungen erfolgen jeweils für zwei verschiedene Abstände r_i des Kraftmessers von der Drehachse. Geeignete Werte dafür sind r_1 = 0,15 m und r_2 = 0,25 m.

Schätzen sie die Messgenauigkeit des Kraftmessers realistisch ab.

***Achtung**: Feder nicht überdehnen! Der maximale Verdrillungswinkel ist 4π !!*

3.2 Dynamische Bestimmung der Drehfederkonstante $k_{t,dyn}$

Zur Ermittlung der Drehfederkonstante aus Drehschwingungen werden die beiden beweglichen Zylinder der Masse m_Z symmetrisch zur Drehachse auf dem Stab befestigt. Die Zeitmessung erfolgt mit einer Lichtschranke, die möglichst genau in der Gleichgewichtslage des Drehschwingers zu positionieren ist. Sie wird vom Ende des schwingenden Stabes durchquert und schaltet bei Unterbrechung einen Kurzzeitmesser ein oder aus. Ohne weitere Maßnahmen liefert dieser also nur die halbe Periodendauer.

Messmethode: Zur Verringerung des Fehlers bei der Zeitmessung werden halbe Schwingungsdauern für beide bei der ersten Unterbrechung möglichen Bewegungsrichtungen des Stabs - sowohl im als auch gegen den Uhrzeigersinn – gemessen. Für jede Richtung werden fünf Einzelmessungen aufgenommen und daraus ein gemeinsamer Mittelwert für die gesamte Schwingungsdauer gebildet.

Für zwei verschiedene Abstände r_i der Schwerpunkte der beiden Zylinder zur Drehachse ist die Periodendauer T_i der Drehschwingungen zu bestimmen. Auch hier sollten die beiden Radien r_1 = 0,15 m und r_2 = 0,25 m verwendet werden.

3.3 Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment J_{Dr} der Drillachse.

Das Massenträgheitsmoment der Drillachse J_{Dr} soll aus der Periodendauer T der Drehschwingung nach (5) ermittelt werden, dabei ist T aus fünf Einzelwerten zu mitteln. Zum Schalten der Lichtschranke dient ein dünnes Stäbchen.

3.4 Massenträgheitsmomente verschiedener Körper

Das Massenträgheitsmoment verschiedener Körper (Vollzylinder, Hohlzylinder, Kugel und Scheibe) soll aus der Periodendauer T der Drehschwingung nach (5) ermittelt werden, dabei ist T aus fünf Einzelwerten zu mitteln. Bestimmen sie für die Körper Masse und geometrische Abmessungen, jeweils mit Messunsicherheit.

3.5 Massenträgheitsmoment eines unregelmäßigen Körpers

Das Massenträgheitsmoment $J_{Körper}$ eines weiteren Körpers (Osterhase, Weihnachtselch, ...) soll aus der Periodendauer T der Drehschwingung nach (5) ermittelt werden, dabei ist T aus fünf Einzelwerten zu mitteln.

3.6 Der Satz von STEINER

Zum Versuchsaufbau gehört eine Lochscheibe. Sie wird so mit einer Halterung auf der Drillachse befestigt, dass die Drehachse durch ihren Schwerpunkt S oder einen von vier weiteren Punkten P_1 ... P_4 im Abstand a_i zu S verläuft.

Die Achse der Scheibenhalterung ist seitlich abgeplattet. Um ein Durchdrehen zu verhindern, muss hier die Klemmschraube der Drillachse eingreifen. Die Anfangsauslenkung darf nicht zu klein sein, ein Wert um 270° hat sich bewährt.

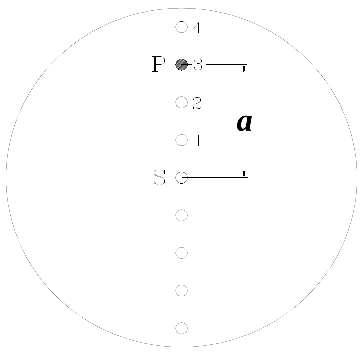


***Abb. 2** : Lochscheibe (schematisch)*

Messen Sie die Periodendauer der Schwingungen der Scheibe in diesen fünf Positionen der Drehachse.

Ermitteln Sie die Masse der Scheibe direkt mit der Waage, dabei darf die Scheibenhalterung nicht mitgewogen werden!

Bitte Messunsicherheit der Waage ermitteln.

4 Auswertung

Für jede Messgröße und jedes Ergebnis muss eine Messunsicherheit berechnet und als absoluter und relativer Fehler angegeben werden.

4.1 Statische Bestimmung der Drehfederkonstante $k_{t,stat}$

Berechnung der zugehörigen acht Werte für die jeweils auf den Stab wirkenden Drehmomente und grafische Auftragung über dem Winkel φ. Die Drehfederkonstante $k_{t,stat}$ folgt nach (3) aus der Steigung der Ausgleichsgerade durch die Messpunkte.

Die Auftragung erfolgt mit dem MAPLE-Programm LINREG. Die zugehörige Messunsicherheit $\Delta k_{t,stat}$ für die Drehfederkonstante ist zu ermitteln.

4.2 Dynamische Bestimmung der Drehfederkonstante $k_{t,dyn}$

Bestimmen Sie $k_{t,dyn}$ nach (9) und vergleichen Sie diesen Wert mit dem Ergebnis $k_{t,stat}$ der statischen Messung. Stellen Sie fest, ob die beiden Werte $k_{t,stat}$ und $k_{t,dyn}$ innerhalb ihrer Messunsicherheiten übereinstimmen und entscheiden Sie (Begründung), welchen Wert Sie für die Drehfederkonstante k_t weiter verwenden.

Mit diesem Wert k_t und der zugehörigen Messunsicherheit Δk_t werden alle weiteren Rechnungen und Auswertungen durchgeführt.

Hinweise zur Berechnung der Messunsicherheit

In die dynamische Bestimmung der Drehfederkonstante $k_{t,dyn}$ gehen nach (9) insgesamt fünf Messgrößen (T_1, T_2, r_1, r_2, m_Z) ein. Zur Ermittlung der Messunsicherheit $\Delta k_{t,dyn}$ ist das Fehlerfortpflanzungsgesetz nach Gauß zu verwenden. Der einfache Rechenweg über die Addition der relativen Unsicherheiten nach $\Delta k_t/k_t = \Delta m_Z/m_Z + \ldots$ („relativer Größtfehler“) ist hier nicht zulässig, da kein reines Potenzgesetz vorliegt. Um die zu berechnenden Ausdrücke dennoch nicht zu unübersichtlich werden zu lassen, empfiehlt sich ein schrittweises Vorgehen:

- Zuerst werden die Unsicherheiten jeder Einzelmessung abgeschätzt, also Δm_z, Δr_1, Δr_2, ΔT_1 und ΔT_2.
- In Gleichung (9) werden die Zähler $Z=r_1^2 - r_2^2$ und die Nenner $N=T_1^2 - T_2^2$ berechnet.

- Die Unsicherheiten von Zähler ΔZ und Nenner ΔN werden berechnet
- Nun kann Gleichung (9) als reines Potenzgesetz besehen werden und unter Einbeziehen von Δm_Z wird $\Delta k_{t,dyn}$ bestimmt.

$$k_t = 8\,\pi^2 m_Z \cdot \frac{r_1^2 - r_2^2}{T_1^2 - T_2^2} = 8\,\pi^2 m_Z \cdot \frac{Z}{N} \tag{9a}$$

4.3 Ermittlung der Hilfsgröße J_0

Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J_0 auf zwei verschiedenen Wegen und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse:

- J_0 berechnet aus der Summe der Anteile der einzelnen Massenträgheitsmomente
- J_{St} und J_Z von Stab und Zylindern nach (7), der Anteil J_{Dr} ist hier vernachlässigbar (warum? Vergl. Aufgabe 4.4)
- J_0 aus der gemessenen Periodendauer T_1 oder T_2 nach (8)

4.4 Massenträgheitsmoment J_{Dr} der Drillachse

Bestimmen Sie J_{Dr} aus der Schwingungsdauer und bewerten Sie das Ergebnis! Kann das Massenträgheitsmoment der Drillachse gegenüber dem von Stab und Zylinder vernachlässigt werden (Begründung) ?

4.5 Massenträgheitsmomente verschiedener Körper

Ermitteln Sie das Massenträgheitsmoment von Vollzylinder, Hohlzylinder, Kugel oder Scheibe auf den beiden nachfolgend angeführten Wegen. Stellen Sie alle Werte übersichtlich in einer Tabelle dar. Darf das Massenträgheitsmoment der Drillachse gegenüber dem der Körper vernachlässigt werden? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(1) Experimentelle Bestimmung aus der Periodendauer T der Drehschwingung nach (5)

(2) Berechnung aus den jeweils gemessenen Massen und den Maßen der Körper nach den theoretischen Beziehungen für die Massenträgheitsmomente einfacher Körper.

- Führen Sie eine Fehlerrechnung für beide Wege durch!

Vergleichen Sie die Ergebnisse, stimmen sie überein? Diskutieren Sie mögliche Gründe für Abweichungen zwischen Rechnung und Messung!

4.6 Massenträgheitsmoment eines unregelmäßigen Körpers

Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment $J_{\text{Körper}}$ des weiteren Körpers (Osterhase, Weihnachtselch, ...) aus der Periodendauer der Drehschwingung. Ermitteln Sie über geometrische Abschätzung seiner Abmessungen einen theoretischen Wert für das Massenträgheitsmoment $J_{\text{Körper}}$ und prüfen Sie die beiden Werte auf Übereinstimmung.

4.7 Der Satz von STEINER

- Bestimmen Sie aus der Periodendauer der Schwingungen das jeweilige Massenträgheitsmoment J_i der Scheibe mit ihrer Halterung bezüglich dieser fünf Positionen der Drehachse.
- Tragen Sie die jeweiligen Werte J_i gegen das Quadrat des zugehörigen Abstands a_i in einem Diagramm auf. Nach (2) sollten bei der Auftragung von $J(a)$ gegen a^2 die Messpunkte auf einer Geraden liegen. Ermitteln Sie daraus die Masse m der Scheibe und die zugehörige Messunsicherheit Δm.
- Vergleichen und bewerten Sie die Resultate für die Scheibenmasse aus dem Satz von Steiner mit der direkten Messung.
- Ist die Annahme einer freien Drehschwingung gerechtfertigt?

Wie bereits bei Aufgabe 4.1 wird das MAPLE-Programm LINREG verwendet. Die Messunsicherheit Δm für die Scheibenmasse ist zu ermitteln.