Techn. Physik 1 MBB/MAP, SS 2018 – Lösungen

Aufgabe 1:

(a) Eigenfrequenz und Periode erhält man aus der Differentialgleichung nach Linearisierung für kleine Ausschläge.

Mit dem Massenträgheitsmoment (Satz von Steiner)

$$J = J_{Stab} + J_{Scheibe} =$$
$$= \frac{m_1}{12}\,l^2 + m_1\left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\,r^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{7}{48}\,m_1 l^2 + \frac{51}{200}\,m_2 l^2 = \frac{41}{150}\,m_1 l^2\,,$$

dem Drehmoment aus der Schwerkraft

$$M_G = -m_1 g\,\frac{l}{4}\,\sin(\beta) - m_2 g\,\frac{l}{2}\,\sin(\beta) = -\frac{(m_1+2m_2)gl}{4}\,\sin(\beta) = -\frac{m_1 gl}{2}\,\sin(\beta)\,,$$

dem Drehmoment aus der Feder

$$M_F = -k'\,\beta$$

und dem zweites Newton'schen Axiom für Rotationsbewegungen

$$J\ddot{\beta} = M_G + M_F$$

erhält man nach Linearisierung $\sin(\beta) \approx \beta$

$$\left(\frac{7}{48}\,m_1 + \frac{51}{200}\,m_2\right) l\,\ddot{\beta} + \left(\frac{(m_1+2m_2)g}{4} + \frac{k'}{l}\right)\beta = 0$$

bzw.

$$\frac{41}{150}\,m_1 l\,\ddot{\beta} + \left(\frac{m_1 g}{2} + \frac{k'}{l}\right)\beta = 0\,.$$

Für die Eigenfrequenz und die Periode der Schwingung folgt

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{(m_1+2m_2)g}{4} + \frac{k'}{l}}{\left(\frac{7}{48}\,m_1 + \frac{51}{200}\,m_2\right)l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{m_1 g}{2} + \frac{k'}{l}}{\frac{41}{150}\,m_1 l}} \approx 0.740\,Hz\,,$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \approx 1.352\,s\,.$$

(b) Allgemein gilt bei viskoser Dämpfung

$$\frac{\beta(100T_d)}{\beta(0)} = e^{-100\delta T_d} \qquad \text{mit} \qquad \delta T_d = \frac{2\pi\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\,.$$

Hier kann man mit der Näherung sehr schwacher Dämpfung arbeiten, d.h. es ist $\delta T_d \approx 2\pi\vartheta$; damit folgt

$$\frac{\beta(100T_d)}{\beta(0)} = e^{-200\pi\vartheta}$$

bzw.

$$\vartheta \approx -\frac{1}{200\pi}\,\ln\!\left(\frac{\beta(100T_d)}{\beta(0)}\right) = -\frac{1}{200\pi}\,\ln(0.7) \approx 5.68\cdot 10^{-4}\,.$$

Der Vollständigkeit halber ohne die Näherung sehr schwacher Dämpfung:

$$\frac{2\pi\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}} = \delta T_d \qquad \Longrightarrow \qquad \vartheta = \frac{\delta T_d}{\sqrt{4\pi^2 + (\delta T_d)^2}}\,.$$

Weiter:

$$0.7 = \frac{\beta(100T_d)}{\beta(0)} = e^{-100\delta T_d} \qquad \Longrightarrow \qquad \delta T_d = -\frac{1}{100}\ln(0.7) \approx 3.567\cdot 10^{-3}$$

und mit der vorigen Formel daraus

$$\vartheta \approx 5.677\cdot 10^{-4}\,.$$

(c) Begründung: Hier wirkt nicht nur das Rückstellmoment der Feder, sondern auch das Schwerkraftmoment; erregt wird aber lediglich an der Feder.

Herleitung (der Vollständigkeit halber): Wenn man die Feder am Federfußpunkt harmonisch mit $\beta_E(t) = \hat\beta_E\cos(\Omega t)$ auslenkt, so lautet das Rückstellmoment

$$M_F = -k'\big(\beta - \hat\beta_E\cos(\Omega t)\big)$$

und die Differentialgleichung (ohne Dämpfungsterm)

$$J\ddot\beta + \Big(\frac{(m_1+2m_2)gl}{4} + k'\Big)\beta = k'\hat\beta_E\cos(\Omega t)\,.$$

In normierter Form und nach Einbau des Dämpfungsterms ergibt sich

$$\ddot\beta + 2\delta\dot\beta + \Big(\frac{(m_1+2m_2)gl}{4J} + \frac{k'}{J}\Big)\beta = \frac{k'}{J}\hat\beta_E\cos(\Omega t)$$

bzw. mit den Abkürzungen

$$\omega_0^2 := \frac{(m_1+2m_2)gl}{4J} + \frac{k'}{J}\,, \qquad \vartheta := \frac{\delta}{\omega_0}\,, \qquad \mu := \frac{k'}{J}\frac{1}{\omega_0^2}$$

hat man

$$\ddot\beta + 2\vartheta\omega_0\dot\beta + \omega_0^2\beta = \omega_0^2\mu\,\hat\beta_E\cos(\Omega t)\,.$$

Gegenüber der Differentialgleichung für die erzwungene Schwingung mit Federfußpunkterregung aus der Vorlesung taucht also lediglich auf der rechten Seite der Zusatzfaktor μ auf. Dieser wirkt so, als würde nicht mit der Amplitude $\hat\beta_E$, sondern nur mit der Amplitude $\mu\hat\beta_E$ erregt. Die Vergrößerungsfunktion muß also genau um diesen Faktor korrigiert werden, d.h. sie lautet

$$V(u) = \frac{\mu}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\vartheta u)^2}}\,, \qquad u := \frac{\Omega}{\omega_0}\,.$$

Für $u \to 0$ ist also $V(0) \to \mu$, d.h. wenn das System in diesem Grenzfall mit der Amplitude $\hat\beta_0 = 0.01°$ schwingt, so beträgt die Erregeramplitude

$$\hat\beta_E = \frac{\hat\beta_0}{\mu}\,.$$

Der Vollständigkeit halber: Nach Aufgabenteil **(b)** ist $\mu = k'/(J\omega_0^2) \approx 0.169$ und damit $\hat\beta_E \approx 0.059°$.

Im Resonanzfall gilt

$$V(u_{res}) = V_{max} = \frac{\mu}{2\vartheta\sqrt{1-\vartheta^2}} \qquad \Big(\approx \frac{\mu}{2\vartheta}\Big)$$

und damit

$$\hat\beta_{res} = V_{max}\,\hat\beta_E = \frac{1}{2\vartheta\sqrt{1-\vartheta^2}}\hat\beta_0 \approx 8.80°\,.$$

Aufgabe 2:

(a) Auf der horizontalen Achse ist das Verhältnis der Kreisfrequenzen $u = \Omega/\omega_0$ der erzwungenen Schwingung und der freien ungedämpften Schwingung abgetragen.

(b) Erregung am Federfußpunkt. (Resonanzüberhöhung, $V \to 1$ für $u \to 0$).

(c) $V_0 = 1$

Das bedeutet, daß im quasistationären Grenzfall (Anregungskreisfrequenz „sehr viel kleiner als ω_0" das System mit der gleichen Amplitude schwingt wie der Erreger.

(d) Aus

$$V_{max} = \frac{1}{2\vartheta\sqrt{1-\vartheta^2}}$$

folgt zunächst

$$\vartheta^4 - \vartheta^2 + \left(\frac{1}{2V_{max}}\right)^2 = 0$$

und daraus

$$\vartheta_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{1}{V_{max}^2}}\right).$$

Wenn V_{max} wächst, so muß ϑ *abnehmen*. Damit ist „$-$" das richtige der beiden Vorzeichen, und man erhält schließlich

$$\vartheta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-\frac{1}{V_{max}^2}}\right)}.$$

Für den Fall $\vartheta \ll 1$ ist die Rechnung natürlich erheblich einfacher (gibt aber auch nicht die volle Punktzahl): Dann ist

$$V_{max} \approx \frac{1}{2\vartheta}$$

und damit

$$\vartheta \approx \frac{1}{2V_{max}}.$$

(e) Es ist

$$u_{res} = \frac{\omega_{res}}{\omega_0} = \sqrt{1-2\vartheta^2} \approx 0.935\,.$$

(f) Es ist

$$u_d = \frac{\omega_d}{\omega_0} = \sqrt{1-\vartheta^2} \approx 0.968\,.$$

Aufgabe 3:

(a) Wenn die Wellenlänge um den Faktor 3 größer ist, so ist die Frequenz um den Faktor 3 kleiner. Der Stern entfernt sich also von der Erde.

In der angegebenen Formel für den Dopplereffekt benötigt man damit jeweils das untere Vorzeichen, also

$$\frac{f_B}{f_Q} = \sqrt{\frac{c_0 - v}{c_0 + v}}\,.$$

Auflösen nach v: Mit $a := f_B/f_Q$ erhält man schrittweise

$$\begin{aligned} a^2 = \frac{c_0 - v}{c_0 + v} \quad &\Longleftrightarrow \quad a^2(c_0 + v) = c_0 - v \\ &\Longleftrightarrow \quad (1 + a^2)v = (1 - a^2)c_0 \\ &\Longleftrightarrow \quad v = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}\, c_0 = \frac{1 - (f_B/f_Q)^2}{1 + (f_B/f_Q)^2}\, c_0\,. \end{aligned}$$

Zahlenwert:

$$v = 0.8\, c_0\,.$$

(b) Dopplereffekt bei bewegter Quelle und ruhendem Empfänger:

$$f_B = \frac{c}{c - v_Q}\, f_Q\,;$$

hier ist $v_Q < 0$, da sich die Quelle vom Empfänger entfernt.

Wieder löst man mit $a = f_B/f_Q$ nach v_Q auf:

$$\begin{aligned} a = \frac{c}{c - v_Q} \quad &\Longleftrightarrow \quad a(c - v_Q) = c \quad \Longleftrightarrow \quad av_Q = (a - 1)c \\ &\Longleftrightarrow \quad v_Q = \frac{a - 1}{a}\, c = \frac{f_B/f_Q - 1}{f_B/f_Q}\, c\,. \end{aligned}$$

Zahlenwert:

$$v_Q = -2c\,;$$

das Fahrzeug müßte sich also mit doppelter Schallgeschwindigkeit vom Empfänger weg bewegen, was mit normalen Kfz nicht zu schaffen ist. (Mit einem Überschalljet jedoch schon.)

Aufgabe 4:

(a) Auslöschung ergibt sich (unter den genannten Näherungen) genau dann, wenn für den Gangunterschied der interferierenden Wellen gilt

$$\Delta \;=\; (2m+1)\,\frac{\lambda}{2}\,, \qquad m \in \mathbb{N}_0\,.$$

Dieser Gangunterschied ist natürlich gerade der Lautsprecherabstand l. Mit

$$c \;=\; \lambda f$$

folgt also für die entsprechenden Frequenzen

$$f_m \;=\; \frac{2m+1}{2}\,\frac{c}{l}\,, \qquad m \in \mathbb{N}_0\,,$$

und für die kleinste dieser Frequenzen ergibt sich mit $m = 0$

$$f_0 \;=\; 170\,Hz\,.$$

Zwischen den Lautsprechern laufen die beiden Wellen einander entgegen, es ergibt sich eine stehende Welle.

Auch hier der Vollständigkeit halber (und in der Klausur *nicht* verlangt): Bezeichnet man mit x und $\tilde{x}$ die Ortskoordinaten der von L_1, L_2 ausgehenden Wellen (mit $x = 0$ bzw. $\tilde{x} = 0$ an den Positionen der Lautsprecher, positive Richtung nach rechts), so kann man zwischen den Lautsprechern die Einzelwellen beschreiben durch

$$y_1(x,t) \;=\; \hat{y}\cos(\omega t - kx)\,, \qquad y_2(\tilde{x},t) \;=\; \hat{y}\cos(\omega t + k\tilde{x})$$

(Phasenwinkel $\varphi = 0$, da die Lautsprecher gleichphasig schwingen; beide Amplituden und beide Kreisfrequenzen jeweils gleich groß; Ansatz ebene Wellen, da die Amplitudenabnahme vernachlässigt wird). Nun ist

$$\tilde{x} \;=\; x - l \;=\; x - (2m+1)\,\frac{\lambda}{2}\,,$$

denn L_2 befindet sich im Abstand l rechts von L_1; die Beziehung zwischen λ und l wurde bereits oben ermittelt. Damit ist zunächst

$$\begin{aligned} y_2(x,t) \;&=\; \hat{y}\cos(\omega t + k\tilde{x}) \;=\; \hat{y}\cos\big(\omega t + k\big(x - (2m{+}1)\,\tfrac{\lambda}{2}\big)\big) \;= \\ &=\; \hat{y}\cos\big(\omega t + kx - (2m{+}1)\,\pi\big) \;=\; -\hat{y}\cos\big(\omega t + kx\big)\,. \end{aligned}$$

Die Überlagerung der einander entgegen laufenden Wellen liefert jetzt (Additionstheorem für Cosinus)

$$y(x,t) \;=\; y_1(x,t) + y_2(x,t) \;=\; \hat{y}\cos(\omega t{-}kx) - \hat{y}\cos(\omega t{+}kx) \;=\; 2\hat{y}\sin(kx)\sin(\omega t)\,.$$

Es entsteht also eine stehende Welle mit vom Ort x abhängiger Amplitude $2\hat{y}|\sin(kx)|$. Knoten besitzt diese Welle dort, wo $\sin(kx) = 0$ ist, also $kx_p = p\pi,\ p = 0, 1, 2, \ldots$ Mit

$$k_m \;=\; \frac{2\pi f_m}{c} \;=\; (2m{+}1)\frac{\pi}{l}$$

erhält man für die Stellen x_p der Knoten

$$x_p \;=\; \frac{p\pi}{k_m} \;=\; \frac{p}{2m{+}1}\,l\,.$$

Weil $0 \leqslant x_m \leqslant l$ gelten muß ist darin $p = 0, 1, 2, \ldots (2m{+}1)$, d.h. die Welle besitzt genau $2m{+}2$ Knoten zwischen den Lautsprechern (die Randknoten an den Lautsprecherpositionen sind mitgezählt). Zwischen je zwei dieser Knoten befindet sich ein Bauch; weil $2m$ stets eine gerade Zahl ist, ist also z.B. stets genau in der Mitte zwischen den Lautsprechern ein Bauch.

(b) Der Abstand von B zu L_1 wird mit a bezeichnet. Für Auslöschung in B muß für den Gangunterschied Δ der beiden Signale wieder gelten

$$\Delta = (2n+1)\,\frac{\lambda}{2} = \frac{2n+1}{2}\,\frac{c}{f}\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Der Gangunterschied ergibt sich aus der Abstandsdifferenz des Beobachters zu den Lautsprechern, also

$$\Delta = \sqrt{a^2+d^2} - a\,.$$

Gleichsetzen liefert zunächst

$$\sqrt{a^2+d^2} - a = \frac{2n+1}{2}\,\frac{c}{f} =: q\,.$$

Nun Auflösen nach a:

$$\sqrt{a^2+d^2} = q + a \qquad \Longrightarrow \qquad a^2 + d^2 = q^2 + 2qa + a^2$$

$$\Longleftrightarrow \qquad a = \frac{d^2 - q^2}{2q} = \frac{d^2 - \left(\frac{2n+1}{4}\,\frac{c}{f}\right)^2}{\frac{2n+1}{2}\,\frac{c}{f}}\,.$$

Den größten Abstand erhält man nun für $n = 0$ (dort ist der Zähler des Ausdrucks für a maximal und gleichzeitig der Nenner minimal), also

$$a_{max} = \frac{2d^2 f}{c} = 42.1\,m\,.$$

Für den kleinsten Abstand muß man n so groß wählen, daß der Zähler gerade noch positiv ist; es muß also gelten

$$\frac{2n+1}{4}\,\frac{c}{f} < d \qquad \text{bzw.} \qquad n < \frac{2fd}{c} - \frac{1}{2} \approx 6.56\,.$$

Damit ist

$$n = 6 \qquad \text{und} \qquad a_{min} = 0.50\,m\,.$$

Es können 7 Auslöschungen (für $n = 0$ bis $n = 6$ einschließlich) registriert werden.

Bemerkung: Man muß den Gangunterschied hier via Pythagoras berechnen. Die Formeln aus der Vorlesung können *nicht* angewendet werden, da sie nur im Fernfeld gültig sind.