

Aufgabe 1: (20 P)

a) Streckenberechnung über den räumlichen Pythagoras:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(11\text{m})^2 + (3,66\text{m})^2 + (2,44\text{m})^2} = 11,85 \text{ m}$$

Flugzeit für den Ball bis zum Erreichen der Torlinie:

$$t = \frac{s}{v_B} = \frac{11,85 \text{ m}}{(100:3,6) \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,43 \text{ s.} \quad (4 \text{ P})$$

b) Abzüglich der Reaktionszeit verbleiben dem Torhüter $t = 0,43 \text{ s} - 0,2 \text{ s} = 0,23 \text{ s}$, um aus dem Stand in die obere Ecke zu springen. Nehmen wir überschlagsmäßig eine Strecke von drei Metern an, so müsste der Torhüter aus dem Stand mit einer Geschwindigkeit von

$$v_T = \frac{3 \text{ m}}{0,23 \text{ s}} = 13 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 47 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

springen, um den Ball zu halten. Dies ist selbst für einen Profi unrealistisch, d.h. er sollte sich schon vor dem Schuss eine Ecke aussuchen.

(4 P)

c) Nach dem Impulserhaltungssatz gilt:

$$m_B \cdot v_B = (m_B + m_T) \cdot v \Rightarrow v = \frac{m_B v_B}{m_B + m_T} = 0,17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(4 P)

d) 2. Newtonsches Axiom:

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_B \cdot v_B}{\Delta t} = \frac{0,45 \text{ kg} \cdot 27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,1 \text{ s}} = 125 \text{ N}$$

(4 P)

e) Die Rotationsenergie beträgt $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2 = 5\% \cdot 100 \text{ J} = 5 \text{ J}$

Das Trägheitsmoment einer Hohlkugel berechnet sich laut FS zu $J = \frac{2}{3} m r^2$

$$\text{Umgeformt ergibt sich: } \omega = \sqrt{\frac{2E_{\text{rot}}}{J}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{rot}}}{\frac{2}{3} m r^2}} = \sqrt{\frac{3E_{\text{rot}}}{m r^2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \text{ J}}{0,45 \text{ kg} \cdot 0,11^2 \text{ m}^2}} = 52,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Weiterhin gilt: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,12 \text{ s}$,

somit dreht sich der Ball innerhalb der ersten halben Sekunde $\frac{0,5}{0,12} = 4,2$ mal.

Man bedenke, dass dies kein Widerspruch zu a) ist, es handelt sich ja um einen neuen Schuss, bei 95 J kinetischer Translationsenergie braucht der Ball etwas länger als 0,5 Sekunden, um die Torlinie zu erreichen. Dies lässt sich übrigens leicht berechnen über $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = 95 \text{ J}$.

(4 P)

Aufgabe 2: (20 P)

- a) Sei x die Eindringtiefe, so gilt nach dem Prinzip von Archimedes das folgende Kräftegleichgewicht: Die Gewichtskraft des Holzklotzes entspricht der Auftriebskraft, sprich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit, also:

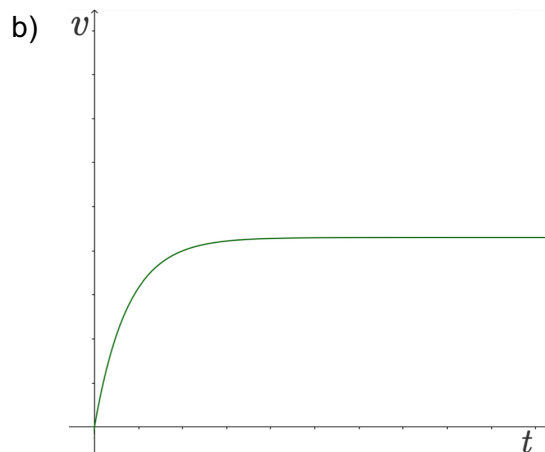
$$m \cdot g = A \cdot x \cdot \rho_W \cdot g$$

$$A \cdot 5 \text{ cm} \cdot \rho_H \cdot g = A \cdot x \cdot \rho_W \cdot g \Rightarrow x = \frac{\rho_H}{\rho_W} \cdot 5 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

Insgesamt befindet sich also ein Volumen von $5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 75 \text{ cm}^3$ unter der Wasseroberfläche, so dass der Wasserspiegel in der Badewanne nur minimal um den Wert y ansteigt:

$$75 \text{ cm}^3 = 180 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} \cdot y \Rightarrow y = 0,008 \text{ cm}$$

(6 P)



Erläuterung: (war nicht verlangt)

Es handelt sich um ein beschränktes Wachstum, die Auftriebskraft ist größer als die Gewichtskraft, so dass der Körper nach oben beschleunigt wird. Mit zunehmender Geschwindigkeit wird jedoch die Reibungskraft größer, im asymptotischen Grenzfall hat man ein Kräftegleichgewicht und demzufolge eine konstante Geschwindigkeit.

(4 P)

- c) Der Ansatz über ein Kräftegleichgewicht lautet:

$$F_{\text{Auftrieb}} = F_{\text{Gewicht}} + F_{\text{Reib}}$$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_{\text{Wasser}} \cdot g = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_{\text{Holz}} \cdot g + F_{\text{Reib}}$$

Für den Reibungsterm muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden:

(i) laminare Strömung: $F_{\text{Reib}} = 6\pi\eta r \cdot v$

(ii) turbulente Strömung: $F_{\text{Reib}} = \frac{1}{2} c_W A \rho_{\text{Wasser}} \cdot v^2$ mit $A = 2\pi \cdot r^2$

(Oberfläche Halbkugel)

Aufgelöst nach der Geschwindigkeit v ergibt sich in den einzelnen Fällen:

$$(i) \quad v = \frac{2}{9} \cdot g \cdot r^2 \cdot (\rho_{\text{Wasser}} - \rho_{\text{Holz}}) = \frac{2}{9} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot (0,01 \text{ m})^2 \cdot 400 \text{ kg m}^{-3} = 121 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$(ii) \quad v = \sqrt{\frac{4}{3 \cdot c_W} \cdot g \cdot r \cdot \frac{\rho_{\text{Wasser}} - \rho_{\text{Holz}}}{\rho_{\text{Wasser}}}} = 0,34 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Wert im Fall (i) ist mit Sicherheit unrealistisch. Berechnet man mit dem Wert aus (ii) die Reynoldszahl,

$$Re = \frac{L \cdot v \cdot \rho_{\text{Wasser}}}{\eta} = \frac{2r \cdot v \cdot \rho_{\text{Wasser}}}{\eta} = \frac{0,02 \text{ m} \cdot 0,34 \text{ ms}^{-1} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}{7,2 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}} \approx 9444 \gg Re_{\text{krit}}$$

so erkennt man, dass bereits beim niedrigen Geschwindigkeitswert eine turbulente Strömung vorliegt. Die Verwendung des Stokesschen Reibungsgesetzes kann also keine vernünftigen Werte liefern. Der Wert aus (ii) ist mit Sicherheit realistischer.

(10 P)

Aufgabe 3: (20 P)

- a) Die Steckdose müssen parallel verdrahtet sein, nur dann liegt überall eine Spannung von 230 V an und jede Steckdose kann somit unabhängig von den anderen verwendet werden.

(3 P)

b) $I = \frac{P}{U} = \frac{1200 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 5,22 \text{ A}$ Insgesamt also $3 \cdot 5,22 \text{ A} = 15,66 \text{ A}$

(3 P)

c) $3 \cdot 4 \text{ h} \cdot 1,2 \text{ kW} = 14,4 \text{ kWh}$

Die Kosten belaufen sich also auf $14,4 \text{ kWh} \cdot 28 \frac{\text{ct}}{\text{kWh}} \approx 4 \text{ €}$

(3 P)

d) $\text{CO}_2: \quad 14,4 \text{ kWh} \cdot 0,6 \frac{\text{kg}}{\text{kWh}} = 8,6 \text{ kg}$

Plutonium: $14,4 \text{ kWh} \cdot 0,01 \frac{\text{mg}}{\text{kWh}} = 0,14 \text{ mg}$

(2 P)

e) $I = 4 \cdot 5,22 \text{ A} = 20,88 \text{ A} > 16 \text{ A}$ Die Sicherung würde herauspringen.

(3 P)

f) $R = \frac{U}{I} = \frac{230 \text{ V}}{5,22 \text{ A}} \approx 44 \Omega$

(3 P)

g) $R = \rho_{\text{Cu}} \cdot \frac{l}{A} = 0,0171 \Omega \cdot \text{mm}^2 \cdot \text{m}^{-1} \cdot \frac{1,2 \text{ m}}{\pi \cdot (0,85 \cdot \text{mm})^2} \approx 9 \text{ m}\Omega$

(3 P)