Wintersemester	2017/18	Blatt 1 (von 2)
Studiengang:	MBB, MAP	Semester 3
Prüfungsfach:	TM2, Teil: Technische Physik 1	Fachnummer: 1173001, 3012
Hilfsmittel:	Manuskript, Literatur, Taschenrechner	Zeit: 50 Minuten

Lösungen

Aufgabe 1: Fadenpendel **(24 Punkte)**

(a) Die abgewickelte Strecke ist die Bogenlänge $s = r\varphi$ (positive Werte bedeuten, daß der Faden abgewickelt wird, negative Werte, daß er aufgewickelt wird).

Der Abstand der Punktmasse von P ist gerade die Länge $l(\varphi)$ des Fadens; sie beträgt

$$l(\varphi) = l_0 + r\varphi\,.$$

(b) Für P hat man direkt

$$x_P(\varphi) = r\cos(\varphi)\,, \qquad y_P(\varphi) = r\sin(\varphi)\,.$$

Für m ergibt sich damit (betrachte das rechtwinklige Dreieck, dessen Hypotenuse durch den abgewickelten Faden zwischen P und m gegeben ist, und dessen Katheten achsenparallel sind)

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= x_P(\varphi) + l(\varphi)\sin(\varphi) = r\cos(\varphi) + (l_0 + r\varphi)\sin(\varphi)\,,\\ y(\varphi) &= y_P(\varphi) - l(\varphi)\cos(\varphi) = r\sin(\varphi) - (l_0 + r\varphi)\cos(\varphi)\,. \end{aligned}$$

(c) Mit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \big(-r\sin(\varphi) + r\sin(\varphi) + (l_0 + r\varphi)\cos(\varphi)\big)\dot{\varphi} = (l_0 + r\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi}\\ \dot{y} &= \big(r\cos(\varphi) - r\cos(\varphi) + (l_0 + r\varphi)\sin(\varphi)\big)\dot{\varphi} = (l_0 + r\varphi)\sin(\varphi)\dot{\varphi} \end{aligned}$$

erhält man

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \big|(l_0 + r\varphi)\dot{\varphi}\big|\,.$$

(d) Für die potenzielle Energie hat man, wenn man das Nullniveau in die Gleichgewichtslage legt (was bei der vorliegenden Aufgabe aber unerheblich ist),

$$E_{pot} = mg\big(y(\varphi) - y(0)\big) = mg\big(r\sin(\varphi) - (l_0 + r\varphi)\cos(\varphi) + l_0\big)\,.$$

Für die kinetische Energie erhält man mit dem vorigen Aufgabenteil

$$E_{kin} = \frac{m}{2}v^2(t) = \frac{m}{2}(l_0 + r\varphi)^2\dot{\varphi}^2\,.$$

(e) Aus dem Energiesatz $0 = \dot{E}_{ges}(t)$ und dem vorigen Aufgabenteil folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{m}{2}(l_0 + r\varphi)^2\dot{\varphi}^2 + mg\big(r\sin(\varphi) - (l_0 + r\varphi)\cos(\varphi) + l_0\big)\Big) = \\ &= m(l_0 + r\varphi)r\dot{\varphi}^3 + m(l_0 + r\varphi)^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \\ &\qquad + mg\Big(r\cos(\varphi) - r\cos(\varphi) + (l_0 + r\varphi)\sin(\varphi)\Big)\dot{\varphi}\\ &= m\dot{\varphi}(l_0 + r\varphi)\Big[r\dot{\varphi}^2 + (l_0 + r\varphi)\ddot{\varphi} + g\sin(\varphi)\Big]\,, \end{aligned}$$

und nach Division durch $m\dot{\varphi}(l_0 + r\varphi)$ und Umordnung der Terme schließlich

$$(l_0 + r\varphi)\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi}^2 + g\sin(\varphi) = 0\,.$$

(f) Für $r \to 0$ ergibt sich ein mathematisches Pendel; für die DGl gilt in diesem Grenzfall

$$l_0\ddot{\varphi} + g\sin(\varphi) = 0\,,$$

und das ist auch genau die DGl des mathematischen Pendels.

(g) Harmonische Schwingungen ergeben sich, wenn die zugrunde liegende Differentialgleichung linear ist. Man muß hier also linearisieren; das bedeutet:

1. Es muß $\sin(\varphi) \approx \varphi$ gelten; d.h. es muß $|\varphi| \lessapprox 10°$ sein.
2. Der zweite Term $r\dot{\varphi}^2$ der DGl muß vernachlässigbar sein.
3. Das Produkt $r\varphi$ muß gegenüber l_0 vernachlässigbar klein sein, damit auch der erste Term der DGl linear wird.

Mit dem vorigen Aufgabenteil kann man auch argumentieren, daß r hinlänglich klein sein muß, sodaß die DGl des mathematischen Pendels eine gute Näherung darstellt, und daß weiter $|\varphi| \lessapprox 10°$ sein muß, damit diese DGl linearisiert werden kann.

Aufgabe 2: Überlagerung von Schwingungen (10 Punkte)

a) $f_{\text{Schweb}} = f_1 - f_2$ (für $f_1 > f_2$) $\qquad f_{\text{Schwing}} = \frac{f_1+f_2}{2}$

$f_1 = f_{\text{Schwing}} + \frac{f_{\text{Schweb}}}{2} = 441\ \text{Hz}$

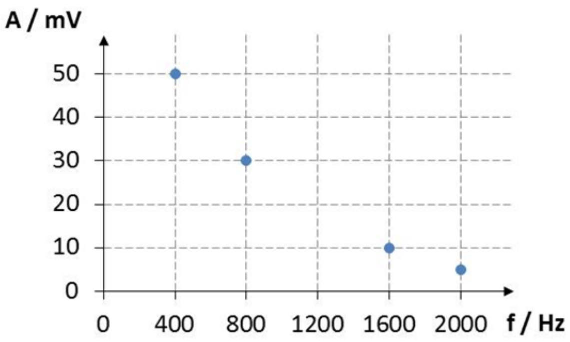
$f_2 = f_{\text{Schwing}} - \frac{f_{\text{Schweb}}}{2} = 439\ \text{Hz}$

b) Spektrum

Grundfrequenz ist
$f_0 = \Delta f = 400\ \text{Hz}$

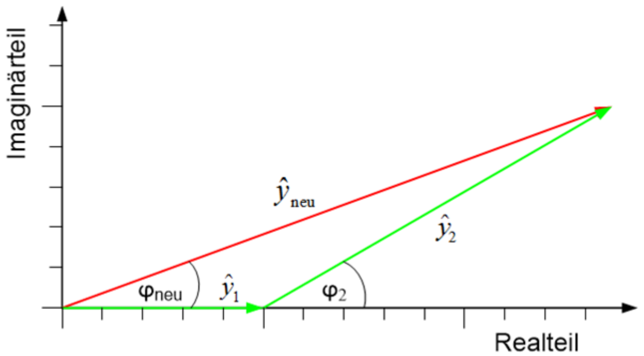
Die 3. Oberschwingung mit $1600\ \text{Hz}$, hat die Amplitude $10\ \text{mV}$.

Die 4. Oberschwinung mit $2000\ \text{Hz}$, hat die Amplitude $5\ \text{mV}$.



c) Grafische Lösung

$\hat{y}_{\text{neu}} = 145\ \text{mm}$
$\varphi_{\text{neu}} = 20\ °$



Alternative mit Formeln

$\hat{y}_{\text{neu}} = \sqrt{\hat{y}_1{}^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \hat{y}_2{}^2}$ und $\tan\varphi_{\text{neu}} = \frac{\hat{y}_1\sin\varphi_1 + \hat{y}_2\sin\varphi_2}{\hat{y}_1\cos\varphi_1 + \hat{y}_2\cos\varphi_2}$

$\hat{y}_{\text{neu}} = 145{,}5\ \text{mm}$ $\qquad \varphi_{\text{neu}} = 20{,}1\ °$

<u>Aufgabe 3:</u> Dopplersonografie **(16 Punkte)**

a) Der Effekt ist umso deutlicher, je kleinere Werte cos φ annimmt. Jedoch wird $\varphi < 10°$ aus technischen Gründen nicht möglich sein, da der Schallkopf sich nicht im strömenden Fluid befinden kann, er muss ja auf die Haut aufgesetzt werden. Ein sinnvoller Wertebereich ist also etwa **10° ≤ | $\boldsymbol{\varphi}$ | ≤ 60°.**

b) Komponentenzerlegung: $v_\parallel = v_0 \cos\varphi$

c) Vom Teilchen registrierte Frequenz f_1 (bewegter Beobachter, ruhende Quelle):

$$f_1 = f_0\left(1 + \frac{v_\parallel}{c}\right)$$

Vom Empfänger registrierte Frequenz f_2 (bewegte Quelle, ruhender Beobachter)

$$f_2 = f_1 \Big/ \left(1 - \frac{v_\parallel}{c}\right)$$

Also ist $$f_2 = f_0\left(1 + \frac{v_\parallel}{c}\right)\Big/\left(1 - \frac{v_\parallel}{c}\right) = f_0\left(\frac{c+v_\parallel}{c-v_\parallel}\right)$$

und die Frequenzdifferenz $$\Delta f = f_2 - f_0 = f_0\left(\frac{c+v_\parallel}{c-v_\parallel} - 1\right) = f_0\left(\frac{2v_\parallel}{c-v_\parallel}\right)$$

Für $v_\parallel \ll c$ gilt in guter Näherung $$\Delta f = f_0\left(\frac{2v_\parallel}{c}\right) = f_0\left(\frac{2v_0}{c}\right)\cos\varphi$$

d) Wellenlänge $\lambda = c/f = 0{,}308 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$

Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda = 20400 \cdot \mathrm{m}^{-1}$

e) Frequenzdifferenz $\Delta f = 500{,}8\ \mathrm{Hz}$

f) Intensität $I = p_{eff}^2/Z$ mit dem Schallwellenwiderstand $Z = \rho \cdot c$

Hier ist $Z = 1{,}463 \cdot 10^6\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^{-1}}$ im umgebenden Medium

Somit $p_{\mathrm{eff}}^2 = Z \cdot I$ und damit folgt $p_{\mathrm{eff}} = 38249\ \mathrm{Pa} = 0{,}382\ \mathrm{bar}$