Technische Physik, SS 2017 – Lösungen

Aufgabe 1: Kundt'sches Rohr – 15 Punkte

(a) Das Kundt'sche Rohr ist am lautsprecherseitigen Ende offen, am anderen Ende geschlossen. Für die Wellenlängen der stehenden Wellen gilt also

$$\frac{\lambda_0}{4} = L\,, \quad \frac{3\lambda_1}{4} = L\,, \quad \frac{5\lambda_2}{4} = L\,, \quad \ldots\,,$$

und allgemein

$$\frac{2n+1}{4}\,\lambda_n = L\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \lambda_n = \frac{4}{2n+1}\,L\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Mit $c = \lambda f$ folgt für die zugehörigen Frequenzen

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{2n+1}{4}\,\frac{c}{L}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

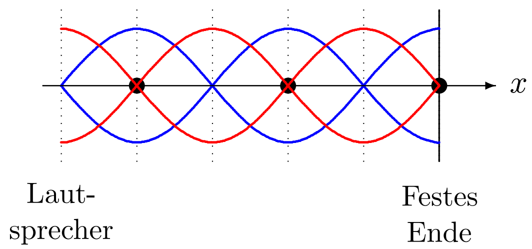
Für $\vartheta = 20°C$ ist

$$c = 343.5\,m/s\,;$$

damit gilt

$$f_0 = 114.5\,Hz\,, \qquad f_1 = 343.5\,Hz\,, \qquad f_2 = 572.5\,Hz\,.$$

(b) In der nebenstehenden Zeichnung sind die Druckamplituden in blau, die Schnelleamplituden in rot dargestellt; die Positionen der Sandhäufchen sind durch schwarze Punkte veranschaulicht.



Druckbäuche, Schnelleknoten und die Positionen der (Mitten der) Sandhäufchen fallen zusammen; ebenso Druckknoten und Schnellebäuche.

(c) Die Wellenlängen ändern sich bei Änderung der Lufttemperatur gar nicht.

Wenn die Lufttemperatur sich auf den Wert $\tilde{\vartheta}$ ändert, so gilt für die Frequenzen

$$\frac{\tilde{f}_n}{f_n} = \frac{\frac{2n+1}{4}\,\frac{\tilde{c}}{L}}{\frac{2n+1}{4}\,\frac{c}{L}} = \frac{\tilde{c}}{c} = \frac{331.5 \;+\; 0.6\cdot\tilde{\vartheta}}{331.5 \;+\; 0.6\cdot\vartheta}\,.$$

Zahlenwert:

$$\frac{\tilde{f}_n}{f_n} = 0.983\,;$$

alle Frequenzen werden also um ca. 1.7% kleiner.

(d) Die minimale Frequenz ist theoretisch f_0 – in der Praxis ist sie aber höher, denn die Sandhäufchen sollten hinlänglich klein sein, damit man ihre Lage halbwegs genau bestimmen kann. Maximale Frequenz: Die Sandhäufchen können nicht beliebig klein (bzw. der Böschungswinkel nicht beliebig groß) werden – daher gibt es eine Obergrenze für n.

(e) Man könnte das Rohr konstruktiv so gestalten, daß man den Lautsprecher ins Rohr hinein verschieben kann. Oder man ersetzt das feste Ende durch einen Stempel, den man verschieben kann. In beiden Fällen lassen sich so die Rohrlänge L und damit die Wellenlängen λ_n verändern, für die stehende Wellen entstehen. Zur Messung einer vorgegebenen Frequenz kann man dann den Stempel so lange verschieben, bis sich eine stehende Welle im Rohr ergibt.

Aufgabe 2: Gedämpfte Schwingung – 9 Punkte

(a) Für das Abklingen der Ausschläge gilt

$$\frac{\hat{x}(nT_d)}{\hat{x}(0)} = e^{-n\delta T_d}\,;$$

darin ist T_d die Periode der gedämpften harmonischen Schwingung. Mit

$$\delta T_d = \omega_0 \vartheta \, \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\vartheta^2}} = \frac{2\pi\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}}$$

folgt

$$r = \frac{\hat{x}(5T_d)}{\hat{x}(0)} = \exp\Big(-\frac{10\pi\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\Big) \approx 4.25\cdot 10^{-2}\,.$$

(Überschlagsrechnung mit $\delta T_d \approx 2\pi\vartheta$ liefert $r \approx 4.32 \cdot 10^{-2}$.)

(b) Es ist

$$\frac{f_d}{f_0} = \frac{\omega_d}{\omega_0} = \sqrt{1-\vartheta^2} = 0.995\,.$$

Damit differieren f_d und f_0 also höchstens um 0.5%.

(c) Für die Vergrößerungsfunktion bei Erregung am Federfußpunkt gilt

$$V(\omega_{res}) = \frac{1}{2\vartheta\sqrt{1-\vartheta^2}}\,, \qquad V(\omega_0) = \frac{1}{2\vartheta}\,.$$

Damit ist mit $\vartheta = 0.1$

$$\frac{V(\omega_0)}{V(\omega_{res})} = \sqrt{1-\vartheta^2} = 0.995\,.$$

Die Resonanzüberhöhung wird also bei Verwendung des Wertes $V(\omega_0)$ um ca. 0.5% gegenüber dem exakten Wert unterschätzt.

Aufgabe 3: Umlenkschwinger – 26 Punkte

(a) Es gilt

$$m_1 g = k_{ers}\, \Delta y_1$$

und

$$k_{ers} = 3k\,.$$

Daraus folgt

$$k = \frac{1}{3}\, k_{ers} = \frac{1}{3}\,\frac{m_1 g}{\Delta y_1} = 100.6\, N/m\,.$$

(b) Bei Absenken der Rolle um y bewegt sich die Masse m_2 um

$$x = 2y$$

nach unten, denn

- zum einen senkt sich mit der Rolle auch das ganze rechte Seilstück samt der Masse m_2 um y ab,
- zum zweiten wird das Seil über die Rolle geführt; wegen des Haftens muß sich die Rolle also drehen, und das rechte Seilstück wird durch diese Rollendrehung genau um das Stück y verlängert, um das das linke Seilstück verkürzt wird.

Bei Absenken um y ist der Drehwinkel der Rolle gegeben durch $\varphi = y/(D/2)$. Für die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ gilt also

$$\omega = \frac{2}{D}\,\dot{y} = \frac{1}{D}\,\dot{x}\,.$$

(c) Für die elastische Energie der Federn gilt (in der Gleichgewichtslage $y = 0$ sind die Federn um y_0 gedehnt)

$$E_{el} = \frac{3k}{2}(y_0 + y)^2 = \frac{3k}{2}\big(y_0 + \tfrac{x}{2}\big)^2\,.$$

Für die potentielle Energie hat man (Nullniveau in der Gleichgewichtslage $x = y = 0$)

$$E_{pot} = -m_1 g y - m_2 g x = -\big(\tfrac{m_1}{2} + m_2\big) g x\,.$$

Für die kinetische Energie ergibt sich schließlich

$$E_{kin} = \frac{m_1}{2}\dot{y}^2 + \frac{J}{2}\omega^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}^2\,.$$

Mit

$$\omega = \frac{1}{D}\,\dot{x}\,, \qquad \dot{y} = \frac{1}{2}\,\dot{x}\,, \qquad J = \frac{m_1}{2}\,\big(\tfrac{D}{2}\big)^2 = \frac{m_1 D^2}{8}$$

folgt daraus

$$E_{kin} = \frac{m_1}{8}\dot{x}^2 + \frac{m_1 D^2}{16}\big(\tfrac{\dot{x}}{D}\big)^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\big(\tfrac{3m_1}{8} + m_2\big)\dot{x}^2\,.$$

Die Gesamtenergie lautet also

$$E_{ges} = \frac{1}{2}\big(\tfrac{3m_1}{8} + m_2\big)\dot{x}^2 + \frac{3k}{2}\big(y_0 + \tfrac{x}{2}\big)^2 - \big(\tfrac{m_1}{2} + m_2\big) g x\,,$$

und aus der Energieerhaltung folgt

$$0 = \dot{E}_{ges} = \big(\tfrac{3m_1}{8} + m_2\big)\dot{x}\ddot{x} + \frac{3k}{2}\big(y_0 + \tfrac{x}{2}\big)\dot{x} - \big(\tfrac{m_1}{2} + m_2\big) g\dot{x}\,.$$

Nach Ausklammern und Wegdividieren von $\dot{x}$ sowie Umordnen der Terme bleibt

$$\left(\frac{3m_1}{8} + m_2\right)\ddot{x} \;+\; \frac{3k}{4}\,x \;=\; \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)g - \frac{3k}{2}y_0\,.$$

Entweder aus dem Kräftegleichgewicht in der Gleichgewichtslage,

$$3ky_0 \;=\; (m_1 + 2m_2)g$$

oder weil man weiß, daß die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung um die Gleichgewichtslage homogen sein muß schließt man, daß die rechte Seite dieser Gleichung verschwinden muß; man erhält also letztlich

$$\left(\frac{3m_1}{8} + m_2\right)\ddot{x} \;+\; \frac{3k}{4}\,x \;=\; 0\,.$$

Alternative via Newton'sches Axiom:

Mit P wird der Befestigungspunkt des linken Seilendes bezeichnet. Der positive Drehsinn ist der Uhrzeigersinn (was sich bereits aus der Beziehung $(D/2)\omega = \dot{y}$ ergibt).

- Drehmoment der Anordnung (incl. Reibmoment) bezüglich P:

$$M \;=\; \underbrace{m_1\,\frac{D}{2}\,g \;+\; m_2\,D\,g}_{\text{aus Gewichtskraft}} \;+\; \underbrace{F_F\,\frac{D}{2}}_{\text{Feder}} \;+\; \underbrace{F_R\,\frac{D}{2}}_{\text{Dämpfer}}\,.$$

  Hier bezeichnet $y = 0$ die Gleichgewichtslage. Man kann nun die aus der Gewichtskraft der Anordnung resultierenden Momente weglassen, wenn man dafür auch nur das bei Auslenkung aus der Gleichgewichtslage *zusätzlich entstehende* Federmoment berücksichtigt; dieses ist $M_F = -3ky$. (Das Federmoment in der Gleichgewichtslage kompensiert gerade die aus der Gewichtskraft resultierenden Momente). Damit und mit der Dämpferkraft $F_D = -d\dot{y}$ hat man

$$M \;=\; -3ky\,\frac{D}{2} \;-\; d\dot{y}\,\frac{D}{2}\,.$$

- Drehimpuls der Anordnung bezüglich P:

$$L \;=\; \underbrace{m_1\,\frac{D}{2}\,\dot{y} \;+\; J\omega}_{\text{Rolle}} \;+\; \underbrace{m_2\,D\,\dot{x}}_{\text{Masse}} \;=\; m_1\,\frac{D}{2}\,\dot{y} \;+\; J\dot{\varphi} \;+\; m_2\,D\,\dot{x}\,.$$

- Zweites Newton'sches Axiom: $\dot{L} = M$. Damit ist

$$m_1\,\frac{D}{2}\,\ddot{y} \;+\; J\ddot{\varphi} \;+\; m_2\,D\,\ddot{x} \;= -3ky\,\frac{D}{2} \;-\; d\dot{y}\,\frac{D}{2}\,.$$

  Mit $\ddot{y} = \frac{\ddot{x}}{2}$, $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{D}$ und $J = \frac{m_1}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^2$ folgt

$$m_1\,\frac{D}{4}\,\ddot{x} \;+\; m_1\,\frac{D}{8}\,\ddot{x} \;+\; m_2\,D\,\ddot{x} \;= -3kx\,\frac{D}{4} \;-\; d\dot{x}\,\frac{D}{4}\,,$$

  und nach Division durch D und Zusammenfassen der Terme

$$\left(\frac{3}{8}\,m_1 + m_2\right)\ddot{x} \;+\; \frac{d}{4}\,\dot{x} \;+\; \frac{3k}{4}\,x \;=\; 0\,.$$

(d) Für die Kreisfrequenz gilt

$$\omega \;=\; \sqrt{\frac{\frac{3k}{4}}{\frac{3m_1}{8} + m_2}} \;=\; \sqrt{\frac{6k}{3m_1 + 8m_2}} \;=\; 3.885\,s^{-1}\,.$$

Für die Periode folgt dann

$$T \;=\; \frac{2\pi}{\omega} \;=\; 1.617\,s\,.$$

(e) Die Dämpferkraft eines viskosen Dämpfers mit der Dämpferkonstante d ist gegeben durch

$$F_D \;=\; -dv\,;$$

darin ist v die Geschwindigkeit, mit der sich der Kolben im Dämpferbecher bewegt.

Hier ist also

$$v \;=\; \dot{y} \;=\; \frac{1}{2}\,\dot{x}\,;\ \text{damit ist}$$

$$F_D \;=\; -\frac{d}{2}\,\dot{x}\,.$$

Wie bei der Federkraft (statt $3ky = 3k\,(x/2)$ nur $3ky/2 = 3kx/4$) tritt nun nur die *halbe* Dämpferkraft in der Differentialgleichung auf (Flaschenzug; vgl. auch die Herleitung via Newton'sches Axiom). Damit lautet die um den viskosen Term ergänzte Differentialgleichung

$$\Big(\frac{3m_1}{8} + m_2\Big)\ddot{x} \;+\; \frac{d}{4}\,\dot{x} \;+\; \frac{3k}{4}\,x \;=\; 0\,.$$