HOCHSCHULE ESSLINGEN

Wintersemester 2016/17		Blatt 1 von 3
Studiengänge:	MBB, MAP	Sem. 3 und Wiederholer
Prüfungsfach:	TM 2, Teil 2: Schwingungslehre	Fachnummern: 3011, 3012
Hilfsmittel:	Literatur, Manuskript, Taschenrechner	Zeit: 50 min
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!		

Gesamtpunktzahl: 50

Aufgabe 1 (Fahrzeugschwingung – 20 Punkte):

(a) Die Federn sind parallel geschaltet, also ist

$$k = k_1 + k_2 = 11.8\, N/m\,.$$

(b) Es ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} = 3.136\, s^{-1}$$

$$\delta = \frac{d}{2m} = 0.188\, s^{-1}$$

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = 0.060$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{1-\vartheta^2} = 3.130\, s^{-1}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = 2.007\, s$$

(c) Allgemein gilt

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right), \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Mit $x(0) = 0$ hat man direkt $A = 0$ und es bleibt

$$x(t) = B\, e^{-\delta t}\sin(\omega_d t), \qquad \dot{x}(t) = B\, e^{-\delta t}\left(-\delta\sin(\omega_d t) + \omega_d\cos(\omega_d t)\right).$$

Aus $\dot{x}(0) = v_0$ folgt jetzt

$$B = \frac{v_0}{\omega_d} = 0.224\, m$$

und damit letztlich

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_d}\, e^{-\delta t}\sin(\omega_d t) = 0.224 m \cdot e^{-0.188 s^{-1}\cdot t} \cdot \sin(3.130 s^{-1}\cdot t)$$

<u>Alternative:</u>

Ansatz:

$$x(t) = A\, e^{-\delta t}\cos(\omega_d t + \varphi_0), \qquad A > 0, \varphi \in (-\pi, \pi]\,.$$

Mit $x(0) = 0$ hat man

$$\cos(\varphi_0) = 0, \qquad \text{d.h.} \qquad \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}\,.$$

Weiter ist

$$\dot{x}(t) = A\, e^{-\delta t} \big(-\delta \cos(\omega_d t + \varphi_0) - \omega_d \sin(\omega_d t + \varphi_0)\big)\,.$$

Aus $\dot{x}(0) = v_0$ folgt jetzt wegen $\cos(\varphi_0) = 0$

$$v_0 = -A\big(\delta \cos(\varphi_0) - \omega_d \sin(\varphi_0)\big) = -A\omega_d \sin(\varphi_0)\,.$$

Da $A > 0, v_0 > 0, \omega_d > 0$ sind muß $\varphi = -\pi/2$ sein; damit erhält man

$$A = \frac{v_0}{\omega_d} = 0.224\, m$$

und schließlich wieder

$$x(t) = A\, e^{-\delta t} \sin(\omega_d t) = 0.224 m \cdot e^{-0.188 s^{-1} \cdot t} \cdot \sin(3.130 s^{-1} \cdot t)$$

(d) Da das System nur einen einzigen Freiheitsgrad besitzt (die Auslenkung x des Fahrzeugs) können keine Schwebungen entstehen.

(e) Der erste Durchlauf durch die Gleichgewichtslage erfolgt bei $t_1 = T_d/2$; dort ist

$$\dot{x}(t_1) = v_0\, e^{-\delta T_d/2} = 0.580\, m/s\,.$$

(f) Die Federkräfte und die Dämpfungskraft lauten

$$F_1 = -k_1 x\,, \qquad F_2 = -k_2(x - x_E)\,, \qquad F_D = -d\dot{x}$$

Mit dem zweiten Newton'schen Axiom erhält man daraus

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 x_E$$

und nach Normierung

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{k_2}{k_1 + k_2}\, \omega_0^2 \hat{x}_E \cos(\Omega t)\,.$$

(g) Die Bewegungsgleichung entspricht der Gleichung aus der Vorlesung für die Erregung am Federfußpunkt; lediglich der Faktor $\mu := k_2/(k_1 + k_2) = 0.5$ tritt zusätzlich auf. Er wirkt sich reduzierend auf die Erregeramplitude aus.

Die Vergrößerungsfunktion enthält gegenüber der Vorlesung also lediglich diesen zusätzlichen Faktor. Sie lautet

$$V(u) = \frac{\hat{x}}{\hat{x}_E} = \frac{\mu}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + (2\vartheta u)^2}}$$

mit

$$u := \frac{\Omega}{\omega_0}\,, \quad \mu = \frac{k_2}{k_1 + k_2}\,.$$

Aufgabe 2 (Progressive Feder – 10 Punkte):

(a) In der Gleichgewichtslage muß die Federkraft die Gewichtskraft der Masse kompensieren; es ist also

$$F_0 = mg = 0.883\, N\,.$$

Diese Kraft fällt in den linearen Bereich der Federkennlinie; dort gilt

$$F(s) = ks$$

mit

$$k \;=\; F(3\,cm)/(3\,cm) \;=\; 0.5\,N/cm\,.$$

Daraus erhält man

$$s_0 \;=\; \frac{F_0}{k} \;=\; \frac{mg}{k} \;=\; 1.766\,cm\,.$$

(b) Die Schwingung muß im linearen Bereich der Federkennlinie bleiben, d.h. die Federdehnung darf nicht größer als $s_1 := 3\,cm$ werden. Da die Schwingung symmetrisch um die Gleichgewichtslage s_0 herum erfolgt muß also gelten

$$s_0 + \hat{x} \leqslant s_1\,,$$

also ist

$$\hat{x}_{max} \;=\; s_1 - s_0 \;=\; 1.234\,cm\,.$$

Für diesen Wert ist $s_0 - \hat{x}_{max} > 0$, man muß sich also keine Gedanken darüber machen, wie sich die Feder bei Stauchung verhält.

(c) Mit dem Wert der Federkonstanten aus Aufgabenteil **(a)** ist

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}} \;=\; 23.6\,s^{-1}$$

und

$$T_0 \;=\; \frac{2\pi}{\omega_0} \;=\; 0.267\,s.$$

(d) Während der Phase der Schwingung, wo die Feder in den nichtlinearen Bereich hinein gedehnt ist, ist die Rückstellkraft *größer* als bei einer linearen Feder mit Federkonstante k. Damit ist die Beschleunigung der Masse in dieser Phase größer als bei der harmonischen Schwingung; demzufolge dauert das Durchlaufen des entsprechenden Auslenkungsbereichs weniger lange und insgesamt sinkt die Periodendauer T gegenüber T_0.

Aufgabe 3 (Flur – 20 Punkte):

(siehe nächste Seite)

Lösungsvorschlag ***Flur*** ***Autor H Käß***

a) Stehende Welle mit $L = \lambda_{min} / 2$ und $c = f_{min} \cdot \lambda_{min}$

Schallgeschwindigkeit $c = (331{,}5 + 0{,}6 \cdot 25\ °C / °C)\ m/s = 346{,}5\ m/s$

Daraus $f_{min} = c / (2 \cdot L) = \mathbf{11{,}55\ Hz}$

b) Druckknoten in der Mitte des Flurs
Druckbäuche an den beiden Enden

c) Für die Eigenfrequenzen gilt $f_n = n \cdot c / (2 \cdot L)$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$

Die beiden nächstliegenden Eigenfrequenzen sind damit

$f_2 = \mathbf{23{,}10\ Hz}$

$f_3 = \mathbf{34{,}65\ Hz}$

d) *Hinweis: Diese Frequenz von* 46,2 Hz *ist die vierttiefste Eigenfrequenz f_4 des Flurs*

Eigenkreisfrequenz $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \mathbf{290{,}28\ s^{-1}}$

Wellenzahl $k = 2 \cdot \pi / \lambda = \omega / c = \mathbf{0{,}8378\ m^{-1}}$

e) Für den Intensitätspegel gilt $L_I = 10 \lg (I / I_0)\ dB$ mit $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$

Dies liefert die Intensität $I = 10^{8{,}5} \cdot I_0 = 10^{-3{,}5}\ W/m^2 = 3{,}162 \cdot 10^{-4}\ W/m^2$

Schallkennimpedanz Z $Z = \rho \cdot c = 422{,}7\ kgm^{-2}s^{-1}$

Effektivwert Schalldruck $p_{eff} = \sqrt{I \cdot Z} = \mathbf{0{,}3656\ Pa}$

Effektivwert Schallschnelle $v_{eff} = \sqrt{I / Z} = \mathbf{0{,}8649 \cdot 10^{-3}\ m/s} = 0{,}8649\ mm/s$

Hinweis: als Näherung können zur Berechnung der Effektivwerte die Definitionen der Pegel L_p und L_v verwendet werden. Diese gehen von Standardbedingungen mit der Impedanz Z = 400 $kgm^{-2}s^{-1}$ *aus und liefern:* $p_{eff} = 0{,}3556\ Pa$ *sowie* $v_{eff} = 0{,}8891\ mm/s$.

f) Eigenfrequenz Helmholtzresonator
$$f_{res} = \frac{c}{2\,\pi} \sqrt{\frac{A_H}{V_K\ l_{eff}}}$$

Volumen des Flurs $V_K = L \cdot B \cdot H = 112{,}5\ m^3$

Querschnitt Kanal $A_H = B_K \cdot H_K = 0{,}15\ m^2$

Länge Kanal $l_{eff} = L_K = 1\ m$ somit $\mathbf{f_{res} = 2{,}014\ Hz}$

Da die hörbaren Schallfrequenzen zwischen 16 Hz und 20 kHz liegen, wäre diese Schwingungsfrequenz **nicht hörbar**.