HOCHSCHULE ESSLINGEN

Wintersemester 2015/16		Blatt 1 von 3
Studiengänge:	MBB, MAP	Sem. 3 und Wiederholer
Prüfungsfach:	TM 2, Teil 2: Schwingungslehre	Fachnummern: 3011, 3012
Hilfsmittel:	Literatur, Manuskript, Taschenrechner	Zeit: 50 min
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!		

Gesamtpunktzahl: 50

Aufgabe 1 (Schwingende Saite – 12 Punkte):

(a) Wellenausbreitungsgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\,.$$

(b) Für die Wellenlänge der $n-$ten Harmonischen gilt

$$\lambda_n = \frac{2L}{n+1}$$

($n = 0$ entspricht der Grundschwingung). Mit $c = \lambda_n f_n$ hat man also

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{\sqrt{F/\mu}}{2L}\cdot(n+1)\,.$$

(c) Aus

$$1.1 = \frac{f_{0,neu}}{f_{0,alt}} = \frac{\sqrt{F_{neu}}}{\sqrt{F_{alt}}}$$

folgt

$$F_{neu} = 1.21\,F_{alt}\,,$$

d.h. man muß die Zugkraft um 21 % vergrößern.

Wegen

$$\frac{f_{n,neu}}{f_{n,alt}} = \frac{\sqrt{F_{neu}}}{\sqrt{F_{alt}}} = 1.1$$

vergrößern sich damit *alle* Eigenfrequenzen der Saite um 10 %.

(d) Aus

$$1.1 = \frac{f_{0,neu}}{f_{0,alt}} = \frac{L_{alt}}{L_{neu}}$$

folgt

$$L_{neu} = \frac{1}{1.1}\,L_{alt} \approx 0.91\,L_{alt}\,,$$

d.h. man muß die Saite um ca. 9 % verkürzen.

Wegen

$$\frac{f_{n,neu}}{f_{n,alt}} \;=\; \frac{L_{alt}}{L_{neu}} \;=\; 1.1$$

vergrößern sich damit *alle* Eigenfrequenzen der Saite um $10\,\%$.

Aufgabe 2 (Dopplereffekt; Schwebung – 9 Punkte):

(a) Dopplereffekt mit bewegter Quelle und ruhendem Beobachter ($v > 0$ bedeutet Bewegung auf die Quelle zu):

$$f_{B1} \;=\; \frac{1}{1 - v_1/c}\, f_Q\,.$$

Auflösen nach f_Q ergibt

$$f_Q \;=\; \left(1 - \frac{v_1}{c}\right) f_1 \;=\; 388.2\, Hz$$

(b) Die Frequenz f_{B2}, die der Beobachter von dem zweiten Zug hört, beträgt

$$f_{B2} \;=\; f_{B1} \pm f_S\,.$$

Die bekannte Frequenz f_Q des Horns der Lokomotive hängt mit f_{B2} über die Beziehung

$$f_{B2} \;=\; \frac{1}{1 - v_2/c}\, f_Q$$

zusammen. Auflösen nach v_2 ergibt

$$v_2 \;=\; c \cdot \left(1 - \frac{f_Q}{f_{B2}}\right) \;=\; c \cdot \left(1 - \frac{f_Q}{f_{B1} \pm f_S}\right).$$

Es gibt also zwei mögliche Geschwindigkeiten, mit der sich der zweite Zug nähern kann; Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$v_{2,1} \;=\; 11.6\, m/s \,\widehat{=}\, 41.9\, km/h\,, \qquad v_{2,2} \;=\; 8.34\, m/s \,\widehat{=}\, 30.0\, km/h\,.$$

Aufgabe 3 (Freie gedämpfte Schwingungen – 29 Punkte):

(a) Als Koordinatenursprung wird die Gleichgewichtslage gewählt. Dann können in der Bewegungsgleichung die Gewichtskraft und die Auftriebskraft (beide konstant) weggelassen werden, wenn man bei der Federkraft nur die bei Auslenkung aus der Gleichgewichtslage *zusätzlich* auftretende Kraft berücksichtigt.

Die Bewegungsgleichung lautet dann mit dem zweiten Newton'schen Axiom

$$m\ddot{x} \;=\; -6\pi\eta r\dot{x} \;-\; kx$$

bzw. mit

$$m \;=\; \rho_0\, \frac{4\pi r^3}{3}$$

nach Normierung

$$\ddot{x} \;+\; \frac{9\eta}{2\rho_0 r^2}\, \dot{x} \;+\; \frac{3k}{4\pi\rho_0 r^3}\, x \;=\; 0\,.$$

(b) Aus der Differentialgleichung liest man ab, daß gilt

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{3k}{4\pi\rho_0 r^3}}\,, \qquad \delta \;=\; \frac{9\eta}{4\rho_0 r^2}\,.$$

(c) Es gilt

$$\frac{x(nT_d)}{x(0)} = e^{-n\delta T_d}\,.$$

Mit $x(nT_d)/x(0) = 1/2$ folgt daraus nach kurzer Umformung

$$n\delta T_d = \ln(2)\,.$$

Nach dem Hinweis ist $\delta T_d = 2\pi\vartheta$ und damit

$$n\,2\pi\vartheta = \ln(2)\,.$$

Auflösen dieser Formel nach ϑ liefert

$$\vartheta = \frac{\ln(2)}{2\pi n}\,. \qquad (*)$$

Mit Aufgabenteil **(b)** und $\vartheta = \delta/\omega_0$ folgt weiter

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{9\eta}{4\rho_0 r^2}\sqrt{\frac{4\pi\rho_0 r^3}{3k}} = \eta\sqrt{\frac{27\pi}{4}}\,\frac{1}{\sqrt{\rho_0 r k}}\,,$$

also

$$\eta = \vartheta\sqrt{\frac{4}{27\pi}}\sqrt{\rho_0 r k} \overset{(*)}{=} \ln(2)\sqrt{\frac{1}{27\pi^3}}\,\frac{\sqrt{\rho_0 r k}}{n}\,.$$

(d) Mit den angegebenen Zahlenwerten ist

$$\eta = 0.015\,kg/m/s\,.$$

(e) Unter der Annahme sehr schwacher Dämpfung ist

$$T_d \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\rho_0 r^3}{3k}} \sim \sqrt{\frac{\rho_0 r^3}{k}} \qquad \text{und (s.o.)} \qquad \vartheta \sim \frac{1}{\sqrt{\rho_0 r k}}\,.$$

Es gilt also:

$$\begin{array}{cccc}
\rho_0\uparrow & \Longrightarrow & T_d\uparrow & \vartheta\downarrow \\
r\uparrow & \Longrightarrow & T_d\uparrow\uparrow & \vartheta\downarrow \\
k\uparrow & \Longrightarrow & T_d\downarrow & \vartheta\downarrow
\end{array}$$

Für eine gute Meßgenauigkeit sollte die Schwingung möglichst langsam abklingen (d.h. es sollten möglichst viele Perioden zu beobachten sein); gleichzeitig sollte die Periode möglichst groß sein.

Die Erhöhung eines beliebigen der drei Parameter um einen gegebenen Prozentsatz bewirkt stets die gleiche Reduktion beim Dämpfungsgrad; hier ist also kein Unterschied der drei Parameter.

Die Erhöhung des Radius der Kugel bewirkt aber die größte Steigerung in der Periode der Schwingung; dies ist also der bevorzugte Parameter.