Lösungsvorschlag ***Reibungsmessung*** ***Autor H Käß***

a) Im Grenzfall: Gleichgewicht zwischen Hangabtriebskraft F_H und Haftreibungskraft F_{HR}

Hangabtriebskraft $F_H = m \cdot g \cdot \sin(\varphi_{max})$

Haftreibungskraft $F_{HR} = \mu_h \cdot F_N = \mu_h \cdot m \cdot g \cdot \cos(\varphi_{max})$

Dann folgt aus $F_H = F_{HR}$ $\mu_h = \sin(\varphi_{max}) / \cos(\varphi_{max}) = \mathbf{\tan(\varphi_{max})}$

Oder alternativ $\boldsymbol{\varphi_{max} = \arctan(\mu_h)}$

$\varphi_{max} = \arctan(0{,}6) = \mathbf{30{,}96°}$

b) Entgegen der Bewegungsrichtung wirkt die immer konstante Gleitreibungskraft. Die Differenz zwischen Hangabtriebs- und Gleitreibungskraft beschleunigt den Block

Gleitreibungskraft $F_{GR} = \mu_g \cdot F_N = \mu_g \cdot m \cdot g \cos(\varphi_{max})$

Beschleunigungskraft $F_B = F_H - F_{GR} = m \cdot g\,(\sin(\varphi_{max}) - \mu_g \cos(\varphi_{max}))$

Die Beschleunigung folgt aus $a = F_B / m = g\,(\sin(\varphi_{max}) - \mu_g \cos(\varphi_{max})) =$

$= 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}\ 8{,}56 \cdot 10^{-2} = \mathbf{0{,}8405\ m/s^2}$

Sie ist **entlang der gesamten Wegstrecke *d* konstant**.

c) Aus $\sin(\varphi_{max}) = h / d$ folgt $d = h / \sin(\varphi_{max}) = \mathbf{0{,}5832\ m}$

Konstant beschleunigte Bewegung $d = ½\, a \cdot t_d^2$

und somit $t_d = \sqrt{2\,d / a} = \sqrt{1{,}3876\ \mathrm{s}^2} = \mathbf{1{,}178\ s}$

d) Endgeschwindigkeit ist $v_{end} = a \cdot t_d = \mathbf{0{,}9901\ m/s}$

Aufgabe EES, Kreisbewegung

a) Hubarbeit $W_{Hub} = m \cdot g \cdot h = 800 kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 75 m = 588\,600\ kg \frac{m^2}{s^2}$

$= 589 kJ$

$= 5{,}89 \cdot 10^5 J$

b) Wirkungsgrad $\eta = \frac{W_{out}}{W_{in}} = \frac{W_{Hub}}{P \cdot \Delta t}$ mit $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

Zugeführte Leistung: $P_{zu} = \frac{W_{Hub}}{\eta \cdot \Delta t} = \frac{5{,}89 \cdot 10^5 J}{0{,}7 \cdot 15 s} = 56\,057{,}14 \frac{J}{s}$

$= 56{,}1 kW$

c) Geschwindigkeit in Punkt C in Abh. von d:

$|\vec{F}_G| = |\vec{F}_Z|$

$m \cdot g = \frac{mv^2}{d/2} \rightarrow v^2 = \frac{d}{2} \cdot g \quad (1)$

$\rightarrow v = \sqrt{\frac{d}{2} \cdot g}$

Maximaldurchmesser d für Looping:

$E_{pot}^{B} = E_{pot}^{C} + E_{kin}^{C}$

$m \cdot g \cdot h_B = m \cdot g \cdot d + \frac{1}{2} m v_c^2$

mit (1): $g \cdot h_B = g \cdot d + \frac{1}{2} v^2 = g \cdot d + \frac{d}{4} \cdot g$

$h_B = d + \frac{1}{4} \cdot d = \frac{5}{4} \cdot d$

$d = \frac{4}{5} \cdot h_B = \frac{4}{5} \cdot 75 m = 60 m$

Geschwindigkeit v_D in Punkt D: nur kinetische Energie, diese muss gleich der potentiellen Energie in Punkt B sein.

$E_{kin}^{B} = E_{pot}^{B}$

$\frac{1}{2} m v_D^2 = m \cdot g \cdot h_B \rightarrow v_D = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_B} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 75 m} = \sqrt{1471{,}5 \frac{m^2}{s^2}}$

$= 38{,}36 \frac{m}{s}$

Aufgabe Unelastischer Stoß, Energie, Reibung

a) Geschwindigkeit u der beiden Fahrzeuge nach dem unelastischen Stoß:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = u(m_1 + m_2)$$

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

v_2 ist bzgl. v_1 entgegengesetzt gerichtet (frontale Kollision): $v_2 = -30\,km/h$

$$u = \frac{2000\,kg \cdot \left(\frac{45}{3{,}6}\right)\frac{m}{s} + 1250\,kg \cdot \left(-\frac{30}{3{,}6}\right)\frac{m}{s}}{2000\,kg + 1250\,kg} = 4{,}487\,\frac{m}{s}$$

$$= 16{,}154\,\frac{km}{h}$$

Geschwindigkeitsänderung Wohnmobil: $v_1 - u = 45\,\frac{km}{h} - 16{,}154\,\frac{km}{h} = 28{,}846\,\frac{km}{h}$

Geschwindigkeitsänderung PKW: $v_2 - u = -30\,\frac{km}{h} - 16{,}154\,\frac{km}{h} = -46{,}154\,\frac{km}{h}$

b) kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$

$$E_{kin1}|_{vor} = \frac{1}{2} \cdot 2000\,kg \cdot \left(\frac{45}{3{,}6}\right)^2 \frac{m^2}{s^2} = 156\,250\,J = 156{,}25\,kJ$$

$$E_{kin2}|_{vor} = \frac{1}{2} \cdot 1250\,kg \cdot \left(\frac{30}{3{,}6}\right)^2 \frac{m^2}{s^2} = 43\,402{,}78\,J = 43{,}40\,kJ$$

$$E_{kin}|_{nach} = \frac{1}{2}(2000\,kg + 1250\,kg) \cdot \left(4{,}487\,\frac{m}{s}\right)^2 = 32\,719{,}02\,J = 32{,}72\,kJ$$

$$\Delta E = E_{kin1}|_{vor} + E_{kin2}|_{vor} - E_{kin}|_{nach} = 166\,933{,}76\,J = 166{,}93\,kJ$$

Beim elastischen Stoß gilt keine mechanische Energieerhaltung, ein Teil von E_{kin}, ΔE, wird in plastische Deformationsarbeit und Wärme umgewandelt.

c) Gurt bremst Insassen in einem größeren Zeitintervall

-> Verlängerung Bremsweg durch Gurt

-> Reduzierung der Beschleunigung (neg -> Abbremsung)

d) Verschiebung PKW um 15 cm:

$$m_1 v_1 + m_2 \underbrace{v_2}_{=0} = (m_1+m_2)\cdot u \quad \rightarrow \quad u = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} \quad (1)$$

Abbremsen des Wohnmobils $\rightarrow$ negative Beschleunigung:

$$s = -\frac{a}{2} t^2 + v_0 \cdot t \quad , \quad v = -at + v_0$$

mit $v_0 = u$, $v = 0$:

$$s = -\frac{a}{2} t^2 + u \cdot t \quad (2)$$

$$v = 0 = -at + u \quad \rightarrow \quad t = \frac{u}{a} \quad (3)$$

Reibungskraft wirkt bremsend:

$$m \cdot a = F_N \cdot \mu = m \cdot g \cdot \mu \quad \rightarrow \quad a = \mu \cdot g \quad (4)$$

Einsetzen von (3) in (2): $s = -\frac{a}{2} \frac{u^2}{a^2} + u \cdot \frac{u}{a} = -\frac{1}{2}\frac{u^2}{a} + \frac{u^2}{a} = \frac{1}{2}\frac{u^2}{a}$

Mit (1) und (4) folgt: $s = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1+m_2)^2} \cdot \frac{1}{\mu \cdot g}$

$$\rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{2 \cdot s (m_1+m_2)^2 \cdot \mu \cdot g}}{m_1}$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot 15\,m \cdot (2000\,kg + 1250\,kg)^2 \cdot 0{,}4 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}}{2000\,kg}$$

$$= 17{,}631\,\frac{m}{s}$$

$$= 63{,}472\,\frac{km}{h}$$

e) Unelastischer Stoß : $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1+m_2)\cdot u \quad \rightarrow \quad u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (5)$

mit $m_2 = k m_1$ und $v_2 = -\frac{1}{k} \cdot v_1$ mit $k > 0$: $u = \frac{m_1 v_1 + k m_1 \cdot (-\frac{1}{k} v_1)}{m_1 + k m_1} = 0$

Deformationsarbeit $\Delta W = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2}(m_1+m_2) u^2$

mit (5):

$$\Delta W = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2}\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}(v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2 (v_1^2 - 2 v_1 v_2 + v_2^2)}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{k m_1^2 [v_1^2 - 2 v_1 (-\frac{1}{k} v_1) + \frac{1}{k^2} v_1^2]}{m_1 + k m_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \cdot \frac{k+1}{k}$$

Aufgabe Rotation: Bowlingkugel

a) Winkelgeschwindigkeit der Bowlingkugel: $\omega = \frac{v}{r} = \frac{7{,}8\,\frac{m}{s}}{0{,}1m} = 78\,\frac{rad}{s}$

Drehimpuls: $L = J_{Kugel} \cdot \omega = \frac{2}{5} m r^2 \cdot \omega = \frac{2}{5} \cdot 5{,}2\,kg \cdot (0{,}1m)^2 \cdot 78\,\frac{rad}{s}$

$= 1{,}622\,\frac{kg\,m^2}{s} = 1{,}622\,Nms$

b) Gesamte kinetische Energie der Bowlingkugel:

$E_{kin,ges} = E_{trans} + E_{rot} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_{Kugel} \cdot \omega^2$

$= \frac{1}{2} \cdot 5{,}2\,kg \cdot (7{,}8\,\frac{m}{s})^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot 5{,}2\,kg \cdot (0{,}1m)^2\right) \cdot (78\,\frac{rad}{s})^2$

$= 221{,}458\,Nm$

c) Geschwindigkeit der Kugel nach Hinabrollen der Rampe mit Höhe h:

$E_{ges} = E_{pot/vor} = E_{trans} + E_{rot}$

$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_{Kugel} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m r^2 \cdot \omega^2$

$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{2}{10} m r^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{7}{10} m v^2$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot g \cdot h} = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}5m} = 2{,}65\,\frac{m}{s} = 9{,}53\,\frac{km}{h}$

Aufgabe 5:

a) $T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{K}}$ (1)

$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{K}} = T_1 + \Delta T$ (2)

(1) in (2):

$$2\pi \sqrt{\frac{m_2}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{K}} + \Delta T$$

bis hier 2P

aufgelöst nach K und nach Einsetzen ergibt sich (z.B. mit GTR):

$K \approx 49{,}8 \, \frac{N}{m}$

b) $\omega = \frac{2\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{49{,}8 \frac{N}{m}}{0{,}8 kg}} \approx 7{,}89 \, \frac{1}{s}$ $\left(8{,}29 \, \frac{1}{s}\right)$

$v_{max} = \hat{v} = \omega \cdot y_{max}$

$= 7{,}89 \, \frac{1}{s} \cdot 0{,}1 m = \underline{\underline{0{,}789 \, \frac{m}{s}}}$ $\left(0{,}829 \, \frac{m}{s}\right)$

c) Ansatz: $y(t) = y_{max} \cdot \cos(\omega t)$

$\dot{y}(t) = v(t) = -v_{max} \cdot \sin(\omega t)$

$-\cancel{v_{max}} \cdot \sin(\omega t) = -0{,}4 \cdot \cancel{v_{max}}$

$\sin(\omega t) = 0{,}4$

$\underline{\underline{t_1 \approx 0{,}052 s}}$ $(t_1 \approx 0{,}050 s)$

d) $T_0 \approx T_d$ mit $\omega_0 = 7{,}89 \, \frac{1}{s}$ $\left(8{,}29 \, \frac{1}{s}\right)$

folgt $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 0{,}796 s$ $(0{,}758 s)$

$$e^{-\delta \cdot 20 T_0} \approx 0{,}6 \quad | \ln$$

$$-\delta \cdot 20 T_0 = \ln(0{,}6)$$

$$\delta = -\frac{\ln(0{,}6)}{20 T_0} \approx 0{,}032 \, \frac{1}{s} \qquad \left(0{,}034 \, \frac{1}{s}\right)$$

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{0{,}032 \, \frac{1}{s}}{7{,}89 \, \frac{1}{s}} \approx 0{,}0041 \qquad (0{,}0043)$$