HOCHSCHULE ESSLINGEN

Sommersemester 2014		Blatt 1 von 4
Studiengänge:	MBB, MAP	Sem. 3 und Wiederholer
Prüfungsfach:	TM 2, Teil 2: Schwingungslehre	Fachnummern: 3011, 3012
Hilfsmittel:	Literatur, Manuskript, Taschenrechner	Zeit: 50 min
Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!		

Gesamtpunktzahl: 50

Aufgabe 1 (Kugelviskosimeter – 16 bzw. 20 Punkte):

(a) Der Drehimpuls bezogen auf die Rollenachse lautet

$$L = \frac{MR^2}{2}\dot{\varphi} + mR^2\dot{\varphi} = \left(\frac{M}{2} + m\right) R^2\dot{\varphi}\,;$$

das bei Auslenkung aus der Gleichgewichtslage zusätzlich auftretende Federmoment ist gegeben durch

$$M_F = -k_D\varphi\,,$$

und das Reibmoment lautet

$$M_R = -R\,F_R = -6\pi\eta r R v = -6\pi\eta r R^2\dot{\varphi}\,.$$

Die Momente aus der Auftriebs- und der Schwerkraft der Kugel brauchen nicht berücksichtigt zu werden, sie werden durch das Rückstellmoment der Feder im Gleichgewicht kompensiert.

Aus dem zweiten Newton'schen Axiom für Rotationsbewegungen ($\dot{L} = M$) erhält man jetzt die Bewegungsgleichung

$$\left(\frac{M}{2} + m\right) R^2\,\ddot{\varphi} = -6\pi\eta r R^2\dot{\varphi} - k_D\,\varphi$$

bzw. in normierter Form

$$\ddot{\varphi} + \frac{6\pi\eta r}{m + M/2}\,\dot{\varphi} + \frac{k_D}{(m + M/2)R^2}\,\varphi = 0\,.$$

(b) Kreisfrequenzen etc.:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_D}{(m + M/2)R^2}}\,, \quad \delta = \frac{3\pi\eta r}{m + M/2}\,, \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

(c) <u>Näherungsweise mit $T_d \approx T_0$:</u> Aus

$$e^{-n\delta T_d} = \frac{\hat{x}_{10}}{\hat{x}_0} =: q$$

erhält man

$$\delta = -\frac{\ln(q)}{nT_d} \approx -\frac{\ln(q)}{nT_0} = -\frac{\omega_0\ln(q)}{2\pi n}\,.$$

Mit $n = 10$, $q = 0.4$ und $\omega_0 = 3.77\,s^{-1}$ folgt

$$\delta \approx 5.49 \cdot 10^{-2}\,s^{-1}\,, \qquad \vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = 1.46 \cdot 10^{-2}\,.$$

Für die Viskosität ergibt sich schließlich

$$\eta \;=\; \delta\left(m + \frac{M}{2}\right)\frac{1}{3\pi r} \;=\; 1.37 \cdot 10^{-1}\,\frac{kg}{m\,s} \;=\; 137 mPa\,s\,.$$

<u>Exakt:</u> Aus

$$e^{-n\delta T_d} = \frac{\hat{x}_{10}}{\hat{x}_0} =: q$$

erhält man

$$\delta T_d \;=\; -\frac{\ln(q)}{n}\,.$$

Mit

$$\delta T_d = \vartheta\omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{\vartheta\omega_0 \cdot 2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\vartheta^2}} = \frac{2\pi\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}}$$

ist

$$\vartheta \;=\; \frac{\delta T_d}{\sqrt{4\pi^2 + (\delta T_d)^2}} \;=\; \frac{-\ln(q)/n}{\sqrt{4\pi^2 + (\ln(q)/n)^2}}\,.$$

Für $n = 10$ und $q = 0.4$ folgt

$$\vartheta \;=\; 1.46 \cdot 10^{-2}\,.$$

Aus den angegebenen Zahlenwerten folgt $\omega_0 = 3.77\,s^{-1}$ und damit

$$\delta \;=\; \vartheta \cdot \omega_0 \;=\; 5.49 \cdot 10^{-2}\,s^{-1}\,.$$

Für die Viskosität ergibt sich schließlich

$$\eta \;=\; \delta\left(m + \frac{M}{2}\right)\frac{1}{3\pi r} \;=\; 1.37 \cdot 10^{-1}\,\frac{kg}{m\,s} \;=\; 137 mPa\,s\,.$$

Aufgabe 2 (Physikalisches Pendel – 17 Punkte):

(a) Das Massenträgheitsmoment des Systems bezogen auf A beträgt (Satz von Steiner)

$$J_A \;=\; 2 \cdot \left(\frac{mr^2}{2} + ml^2\right) \;=\; m\,(r^2 + 2l^2)\,.$$

Das Rückstellmoment bei Auslenkung aus der Gleichgewichtslage um den Winkel φ lautet

$$\begin{aligned} M_R \;&=\; -l\sin(\alpha+\varphi)\cdot mg \;+\; l\sin(\alpha-\varphi)\cdot mg \;= \\ &=\; mgl\big(-\sin(\alpha)\cos(\varphi) - \cos(\alpha)\sin(\varphi) + \sin(\alpha)\cos(\varphi) - \cos(\alpha)\sin(\varphi)\big) \;= \\ &=\; -2mgl\cos(\alpha)\sin(\varphi)\,. \end{aligned}$$

Damit erhält man aus dem zweiten Newton'schen Axiom für Rotationsbewegungen

$$m\,(r^2 + 2l^2)\cdot\ddot{\varphi} \;+\; 2mgl\cos(\alpha)\sin(\varphi) \;=\; 0$$

bzw.

$$\ddot{\varphi} \;+\; \frac{2gl\cos(\alpha)}{r^2 + 2l^2}\cdot\sin(\varphi) \;=\; 0$$

und linearisiert

$$\ddot{\varphi} \;+\; \frac{2gl\cos(\alpha)}{r^2 + 2l^2}\cdot\varphi \;=\; 0\,.$$

(b) Kreisfrequenz und Periode:

$$\omega \;=\; \sqrt{\frac{2gl\cos(\alpha)}{r^2+2l^2}}\,, \qquad T \;=\; \frac{2\pi}{\omega} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{r^2+2l^2}{2gl\cos(\alpha)}}\,;$$

Grenzfall $\alpha \to \pi/2$:

$$\omega \to 0\,, \qquad T \to \infty\,.$$

Für $\alpha = \pi/2$ befinden sich die Scheiben an einem einzigen Stab der Länge $2l$, daher ist das gesamte Rückstellmoment bei Auslenkung aus der Gleichgewichtslage 0. Damit kommt keine Schwingung zustande.

(c) Trägheitsradius:

$$i_S \;=\; \sqrt{\frac{J_S}{2m}}\,.$$

Mit

$$J_S \;=\; 2\cdot\left(\frac{mr^2}{2}+ml^2\sin^2(\alpha)\right) \;=\; m\left(r^2+2l^2\sin^2(\alpha)\right)$$

ergibt sich

$$i_S \;=\; \sqrt{\frac{r^2}{2}+l^2\sin^2(\alpha)}\,.$$

Reduzierte Pendellänge: Der Abstand vom Schwerpunkt zum Aufhängepunkt beträgt $d = l\cos(\alpha)$, also ist

$$l_{red} \;=\; \frac{J_A}{2md} \;=\; \frac{r^2+2l^2}{2l\cos(\alpha)}\,.$$

Für $\alpha \to 0$, $r \to 0$ erhält man

$$i_S \;\to\; 0\,, \qquad l_{red} \;\to\; l\,;$$

dies sind die Werte des mathematischen Pendels mit Stablänge l (und Masse $2m$), das in diesem Grenzfall entsteht.

Aufgabe 3 (Schwingende Saite – 11 Punkte):

(a) Es gilt

$$f_0 \;=\; \frac{c}{\lambda_0} \;=\; \frac{c}{2l}\,,$$

also

$$c \;=\; 2lf_0 \;=\; 176\,m/s\,.$$

Mit

$$c \;=\; \sqrt{\sigma/\rho}$$

folgt weiter

$$\sigma \;=\; c^2\cdot\rho \;=\; (2lf_0)^2\cdot\rho \;=\; 2.447\cdot 10^8\,Pa\,.$$

Schließlich ist

$$F \;=\; \sigma\cdot A \;=\; (2lf_0)^2\cdot\rho\cdot\frac{\pi d^2}{4} \;=\; 192.2\,N\,.$$

(b) Für die Differenz Δf der Frequenzen, mit denen die Saiten schwingen, gilt

$$\Delta f \;=\; f_S \;=\; f_2 - f_1 \;=\; 1\,Hz$$

(wobei f_2 die größere der beiden Frequenzen bezeichnet). Mit der Schwingungsfrequenz $f_0 = 110\,Hz$ folgt also

$$f_1 \;=\; f_0 - \frac{\Delta f}{2} \;=\; 109.5\,Hz\,, \qquad f_2 \;=\; f_0 + \frac{\Delta f}{2} \;=\; 110.5\,Hz\,.$$

Die Differenz der Saitenspannungen ergibt sich aus den Formeln des Aufgabenteils 1:

$$\sigma_2 - \sigma_1 \;=\; (f_2^2 - f_1^2)\cdot 4l^2\rho \;=\; 4.449\cdot 10^6\,Pa\,.$$

Aufgabe 4 (Dopplereffekt – 6 Punkte):

(a) Dopplereffekt bei ruhendem Sender und bewegtem Empfänger:

$$f_E \;=\; f_S\cdot\left(1+\frac{v}{c}\right) \qquad \text{bzw.} \qquad v \;=\; c\cdot\left(\frac{f_E}{f_S}-1\right).$$

Bei t_1 ist $f_E = 1.5 f_S$, also ist

$v(t_1) \;=\; 0.5c \;=\; 170\,m/s$; das Fahrzeug bewegt sich also auf den Sender zu.

Bei t_3 ist $f_E = 0.5 f_S$, also ist

$v(t_3) \;=\; -0.5c \;=\; -170\,m/s$; das Fahrzeug bewegt sich also vom Sender weg.

(b) Zum Zeitpunkt t_2 passiert das Fahrzeug den Sender.

(c) Diagramm: