Technische Physik, SS 2012 – Lösungen

Aufgabe 1:

(a) Bewegungsgleichung (normiert):

$$\ddot{y} \;+\; \frac{k}{m_W}\, y \;=\; 0$$

Daraus

$$\omega \;=\; \sqrt{\frac{k}{m_W}}\,, \qquad T \;=\; \frac{2\pi}{\omega} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{m_W}{k}} \;=\; 2.565\, s\,.$$

(b) Mit $y = \omega r_W$ und $J_W = m_W r_W^2/2$ erhält man

$$E_{kin} \;=\; E_{trans} \;+\; E_{rot} \;=\; \frac{m_W}{2}\,\dot{y}^2 \;+\; \frac{J_W}{2}\,\omega^2 \;=\; \frac{3m_W}{4}\,\dot{y}^2\,.$$

Außerdem ist

$$E_{el} \;=\; \frac{k}{2}\, y^2\,.$$

(c) Aus dem Energiesatz folgt $0 = \dot{E}_{ges}$, also

$$0 \;=\; \frac{d}{dt}\left(\frac{3m_W}{4}\,\dot{y}^2 \;+\; \frac{k}{2}\, y^2\right).$$

Daraus ergibt sich

$$0 \;=\; \frac{3m_W}{2}\,\ddot{y} \;+\; ky$$

und in normierter Form

$$\ddot{y} \;+\; \frac{2}{3}\,\frac{k}{m_W}\, y \;=\; 0\,.$$

(d) Aus der Bewegungsgleichung erhält man

$$T \;=\; \frac{2\pi}{\omega} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{m_W}{k}} \;=\; \pi\, s\,.$$

Aufgabe 2:

(a) Wenn $y = 0$ die Gleichgewichtslage bezeichnet, so gilt bei Auslenkung um y

- für die zusätzliche Rückstellkraft der Feder: $F_F \;=\; -ky$;
- für die Reibkraft: $F_R \;=\; -6\pi\eta r\,\dot{y}$.

Die Auftriebskraft ist wie die Gewichtskraft konstant, wird hier also durch die Federvorspannung in der Gleichgewichtslage berücksichtigt. Bei Auslenkung aus der Gleichgewichtslage verursachen beide Kräfte keine Zusatzterme. Die Bewegungsgleichung lautet also

$$m\ddot{y} \;+\; 6\pi\eta r\,\dot{y} \;+\; ky \;=\; 0$$

bzw. normiert

$$\ddot{y} \;+\; 2\,\frac{3\pi\eta r}{m}\,\dot{y} \;+\; \frac{k}{m}\, y \;=\; 0\,.$$

(b) Mit den Standardformeln gilt

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}} \;=\; 14.14\,s^{-1}\,, \qquad \delta \;=\; \frac{3\pi\eta r}{m} \;=\; 0.792\,s^{-1}\,.$$

(Der Dämpfungsgrad beträgt also $\vartheta = \delta/\omega_0 = 0.056$, d.h. es liegt der Fall sehr schwacher Dämpfung vor.)

(b) Mit den Standardformeln gilt

$$\omega_d \;=\; \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \;=\; 14.12\,s^{-1}\,, \qquad T_d \;=\; \frac{2\pi}{\omega_d} \;=\; 0.445\,s\,.$$

(d) Allgemein ist

$$y(t) \;=\; \hat{y}\,e^{-\delta t}\,\cos(\omega_d t + \varphi_0)\,.$$

Durch Differenzieren

$$\dot{y}(t) \;=\; -\hat{y}\,e^{-\delta t}\Big(\delta\cos(\omega_d t + \varphi_0) + \omega_d\sin(\omega_d t + \varphi_0)\Big)$$

und die Anfangsbedingung $\dot{y}(0) = 0$ erhält man die Gleichung

$$0 \;=\; \delta\cos(\varphi_0) + \omega_d\sin(\varphi_0) \qquad \text{bzw.} \qquad \tan(\varphi_0) \;=\; -\frac{\delta}{\omega_d}\,.$$

Diese Gleichung besitzt im Intervall $(-180°, +180°)$ die beiden Lösungen

$$\varphi_{0,1} \;=\; -\arctan\!\big(\tfrac{\delta}{\omega_d}\big) \;=\; -3.21° \qquad \text{und} \qquad \varphi_{0,2} \;=\; 180° - \arctan\!\big(\tfrac{\delta}{\omega_d}\big) \;=\; 176.8°\,.$$

Die Anfangsbedingung für die Auslenkung lautet

$$y_a \;=\; \hat{y}\,\cos(\varphi_0)\,;$$

weil $y_a > 0$ ist scheidet $\varphi_{0,2}$ aus, d.h. der gesuchte Nullphasenwinkel ist

$$\varphi_0 \;=\; \varphi_{0,1} \;=\; -3.21° \qquad \big(\;\widehat{=}\;356.8°\;\big)\,.$$

Damit erhält man für $\hat{y}$

$$\hat{y} \;=\; \frac{y_a}{\cos(\varphi_0)} \;=\; 10.02\,cm\,,$$

und die Bewegungsgleichung lautet

$$y(t) \;=\; 10.02\,cm\cdot\exp\!\big(-0.792\,s^{-1}\cdot t\big)\cdot\cos\!\big(14.12\,s^{-1}\cdot t - 0.056\,rad\big)\,.$$

(e) Aus

$$\frac{y(nT_d)}{y(0)} \;=\; e^{-n\delta T_d}$$

ergibt sich zunächst

$$n \;=\; -\frac{1}{\delta T_d}\,\ln\!\Big(\frac{y(nT_d)}{y(0)}\Big)\,,$$

und mit $y(nT_d) \leqslant 1\,cm$ folgt

$$n \;\geqslant\; 6.54\,, \qquad \text{also} \qquad n = 7 \qquad \text{und} \qquad t \;=\; nT_d \;=\; 3.1\,s\,.$$

(f) Bedingung für den aperiodischen Grenzfall: $\omega_d = \delta$, also

$$\frac{3\pi\eta r}{m} \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Daraus

$$k \;=\; \frac{(3\pi\eta r)^2}{m} \;=\; 0.157\,N/m\,.$$

Aufgabe 3:

(a) Aus Formel: $c \;=\; \sqrt{F/\mu} \;=\; \sqrt{2}\, m/s$

(b) Aus Diagramm: $\hat{y} \;=\; 5\, cm\,, \qquad \lambda = 40\, cm$

Aus Formel: $k = 2\pi/\lambda \;=\; 15.7\, m^{-1}$

(c) Aus Formel: $c \;=\; \lambda f \;=\; \omega/k \quad\Longrightarrow\quad \omega \;=\; k/c \;=\; 22.2\, s^{-1}$

(d) Aus Formel und Diagramm: $\cos(\varphi_0) \;=\; y(0,0)/\hat{y} \;=\; 0.8$

Damit zunächst $\varphi_{0,1} \;=\; 36.9^\circ\,, \qquad \varphi_{0,2} \;=\; 323.1^\circ$

Weil $\dot{y}(0,0) < 0$ ist (Diagramm; Welle läuft nach rechts) scheidet $\varphi_{0,2}$ aus.

Also $\varphi_0 \;=\; 36.9^\circ \;\widehat{=}\; 0.64\, rad$

(e) Mit den obigen Zahlenwerten erhält man

$$y(x,t) \;=\; 5\, cm \cdot \cos\bigl(22.2\, s^{-1} \cdot t - 15.7\, m^{-1} \cdot x + 0.64\, rad\bigr)\,.$$

(f) Formel Energiedichte: $w \;=\; \frac{\rho}{2}\,(\hat{y}\omega)^2$

Damit Energie pro Länge: $e \;=\; w \cdot A \;=\; \frac{\rho A}{2}\,(\hat{y}\omega)^2 \;=\; \frac{\mu}{2}\,(\hat{y}\omega)^2 \;=\; 1.23\, J/m$

Formel Intensität: $S \;=\; w \cdot c$

Damit Leistung: $P \;=\; S \cdot A \;=\; (wA) \cdot c \;=\; e \cdot c \;=\; 1.74\, W$