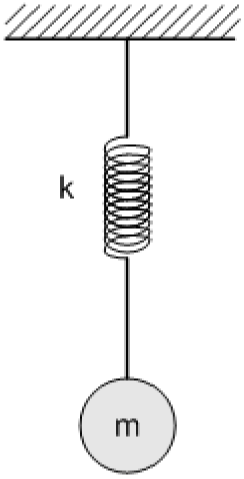
Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Fakultät Grundlagen

Wintersemester	2011/2012	Blatt 1 (von 7)
Studiengang:	MB3 A, B, C	Semester 3
Prüfungsfach:	TM2, Teil 2: Schwingungslehre	Prüfungsnummer: 3011/3012
Hilfsmittel:	Skript, Taschenrechner, Bücher	Zeit: 50 Minuten

Gesamtpunktzahl: 50

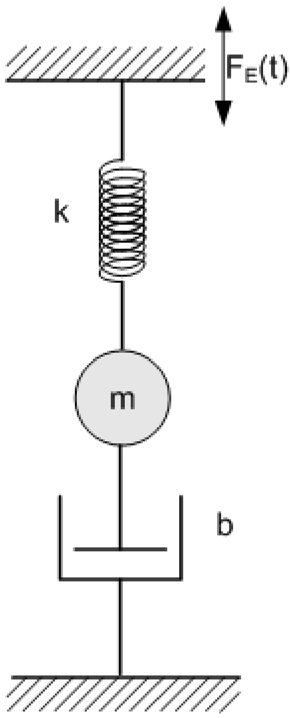
Aufgabe 1: Federschwinger (15 Punkte)



Ein Federschwinger bestehe aus einem Körper der Masse m=2,0 kg und einer masselosen Feder der Federkonstante k. Sie messen eine Amplitude von 0,25 m und eine maximale Beschleunigung von 4 m/s².

a.) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz und die Periodendauer.

b.) Welche Gesamtenergie steckt in diesem System?



Ein Dämpfer mit Dämpfungskonstante b=1 kg/s wird angebaut und das System wird mit einer harmonischen Kraft mit der Amplitude $\hat{F}_E = 10N$ und der Kreisfrequenz $\omega_E = 8\frac{1}{s}$ angeregt.

c.) Mit welcher Amplitude schwingt das System im eingeschwungenen Zustand?

d.) Welche Amplitude wird bei Resonanz erreicht?

e.) Bei welcher Kreisfrequenz liegt die Resonanz genau?

Wintersemester	2011/2012	Blatt 2 (von 7)
Studiengang:	MB3 A, B, C	Semester 3
Prüfungsfach:	TM2, Teil 2: Schwingungslehre	Prüfungsnummer: 3011/3012
Hilfsmittel:	Skript, Taschenrechner, Bücher	Zeit: 50 Minuten

Lösung

a.) Bewegungsgleichung

$$y(t)=\hat{y}\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

$$v(t)=-\hat{y}\cdot\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)=\hat{v}\sin(\omega_0 t+\varphi_0) \qquad -\hat{y}\cdot\omega_0=\hat{v}\,)$$

$$a(t)=-\hat{y}\cdot\omega_0^{\,2}\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=\hat{a}\cos(\omega_0 t+\varphi_0) \qquad -\hat{y}\cdot\omega_0^{\,2}=\hat{a}$$

Wir kennen nur die Beträge der Amplitude und der maximalen Beschleunigung

$$\hat{y}\cdot\omega_0^{\,2}=\hat{a}$$

$$\omega_0^{\,2}=\frac{\hat{a}}{\hat{y}}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{\hat{a}}{\hat{y}}}=\sqrt{\frac{4\frac{m}{s^2}}{0{,}25m}}=4\frac{1}{s} \qquad \left(=4\frac{rad}{s}\right)$$

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{0{,}25m}{4\frac{m}{s^2}}}=1{,}57s$$

b.) Federschwinger $\omega_0^{\,2}=\frac{k}{m}$

also $k=\omega_0^{\,2}m=\frac{\hat{a}}{\hat{y}}\cdot m$

$$E_{ges}=\frac{1}{2}k\hat{y}^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\hat{a}}{\hat{y}}\cdot m\cdot\hat{y}^2=\frac{1}{2}\cdot\hat{a}\cdot m\cdot\hat{y}=\frac{1}{2}\cdot 4\frac{m}{s^2}\cdot 2kg\cdot 0{,}25m=1J$$

c.)

$$A=\frac{\hat{F}_E}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+\left(2D\eta\right)^2}}$$

$$\eta=\frac{\omega_E}{\omega_0}=2;\quad D=\frac{\delta}{\omega_0}=\frac{b/2m}{\omega_0}=0{,}0625;\quad k=\omega_0^{\,2}m=\frac{\hat{a}}{\hat{y}}\cdot m=32\frac{N}{m}$$

A=0,1038 m

d.)

$$A_{\max}=\frac{\hat{F}_E}{k}\frac{1}{2D}=2{,}5m$$ (Näherung für D<<1)

$$A_{\max}=\frac{\hat{F}_E}{k}\frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}=2{,}505m$$ (ohne Näherung)

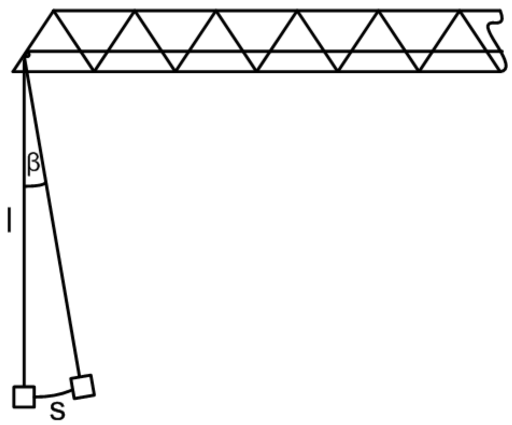
e.)

$$\omega_{res}=\omega_0\sqrt{1-2D^2}=3{,}98\frac{rad}{s}$$

Wintersemester	2011/2012	Blatt 3 (von 7)
Studiengang:	MB3 A, B, C	Semester 3
Prüfungsfach:	TM2, Teil 2: Schwingungslehre	Prüfungsnummer: 3011/3012
Hilfsmittel:	Skript, Taschenrechner, Bücher	Zeit: 50 Minuten

Aufgabe 2 : Kranlast (17 Punkte)

Eine Kranlast schwingt nach abruptem Abbremsen des Krans zum Stillstand mit gedämpften Schwingungen. Die Amplitude zu Beginn sei s_0, nach 10 Schwingungen ist sie auf s_{10} = 46,0 cm und nach 20 Schwingungen auf s_{20} = 30,8 cm abgeklungen. Der Abstand zwischen Lastschwerpunkt und Aufhängepunkt am Kran sei l = 4,0 m.



a.) Mit welcher Amplitude hat die Schwingung begonnen? Wie groß war der anfängliche Ausschlagwinkel β?

b.) Nach wie vielen Perioden n ist die Amplitude s_n erstmals kleiner als 10 cm?

c.) Schätzen Sie die Zeit ab wie lange es dauert, bis die Amplitude kleiner als 10 cm ist unter den Annahmen:

- die Schwingungsdauern der gedämpften und der ungedämpften Schwingung seien näherungsweise gleich groß
- Punktförmige Masse
- Masseloses Seil

Hinweis: Sollten Sie die Aufgabe b.) nicht gelöst haben, nehmen Sie in c.) für die Anzahl der Perioden n = 50 an.

d.) Wie groß ist der Dämpfungsgrad D?

Wintersemester	2011/2012	Blatt 4 (von 7)
Studiengang:	MB3 A, B, C	Semester 3
Prüfungsfach:	TM2, Teil 2: Schwingungslehre	Prüfungsnummer: 3011/3012
Hilfsmittel:	Skript, Taschenrechner, Bücher	Zeit: 50 Minuten

Lösung

a.) $\frac{s_i}{s_{i+n}} = e^{n\delta T_d}$ $\quad \frac{s_0}{s_{10}} = e^{10\delta T_d}$ $\quad \frac{s_{10}}{s_{20}} = e^{10\delta T_d}$

also: $\frac{s_0}{s_{10}} = \frac{s_{10}}{s_{20}}$ $\quad s_0 = \frac{s_{10}^{\,2}}{s_{20}} = \frac{(46cm)^2}{30{,}8cm} = 68{,}7cm$

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{\varphi}{360°} \qquad \varphi = \frac{360° \cdot s}{2\pi r} = 9{,}8°$$

b.) $\frac{s_{10}}{s_{20}} = e^{10\delta T_d}$ $\quad \ln\left(\frac{s_{10}}{s_{20}}\right) = 10\delta T_d$ $\quad \delta T_d = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{s_{10}}{s_{20}}\right)$

$\frac{s_0}{s_n} = e^{n\delta T_d}$ $\quad \ln\left(\frac{s_0}{s_n}\right) = n\delta T_d$ $\quad \ln\left(\frac{s_0}{s_n}\right) = n\frac{1}{10}\ln\left(\frac{s_{10}}{s_{20}}\right)$

$$n = 10 \cdot \frac{\ln\left(\frac{s_0}{s_n}\right)}{\ln\left(\frac{s_{10}}{s_{20}}\right)} = 10 \cdot \frac{\ln\left(\frac{68{,}7cm}{10cm}\right)}{\ln\left(\frac{46cm}{30{,}8cm}\right)} = 48$$

c.) Fadenpendel $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\quad$ Näherung $\quad \omega_d \approx \omega_0$

Dauer des Abklingens $\quad t = n \cdot T_d \approx n \cdot T_0 = n \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot n\sqrt{\frac{l}{g}}$

$t = 2\pi \cdot 48\sqrt{\frac{4{,}0m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}} = 192{,}5s$ oder alternativ für n=50 $\quad t = 2\pi \cdot 50\sqrt{\frac{4{,}0m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}} = 200{,}6s$

d.) $D = \frac{\delta}{\omega_0}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ $\quad$ und siehe b.) $\delta T_d = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{s_{10}}{s_{20}}\right)$ $\quad$ und $T_d \approx T_0$

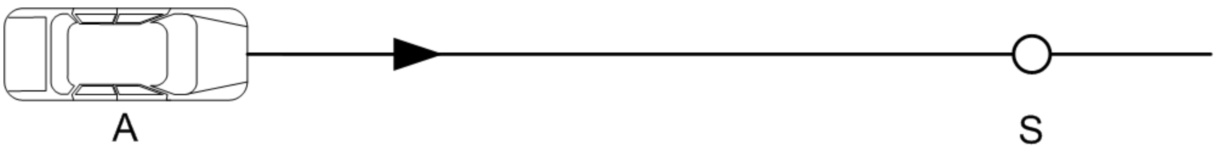
$$D = \frac{\frac{1}{10 \cdot T_d}\ln\left(\frac{s_{10}}{s_{20}}\right)}{\frac{2\pi}{T_0}} = \frac{1}{20\pi \cdot}\ln\left(\frac{s_{10}}{s_{20}}\right) = 6{,}4 \cdot 10^{-3}$$

Wintersemester	2011/2012	Blatt 5 (von 7)
Studiengang:	MB3 A, B, C	Semester 3
Prüfungsfach:	TM2, Teil 2: Schwingungslehre	Prüfungsnummer: 3011/3012
Hilfsmittel:	Skript, Taschenrechner, Bücher	Zeit: 50 Minuten

Aufgabe 3: Dopplereffekt (18 Punkte)

Auf einer geraden Fahrbahn befindet sich im Punkt *S* ein Sender, der einen Ton der Frequenz $f_1 = 400Hz$ aussendet. Die Schallgeschwindigkeit sei $c = 340\frac{m}{s}$.

a.) Ein Fahrzeug *A* nähert sich dem Sender, passiert ihn zum Zeitpunkt $t = 0$ und entfernt sich dann wieder von ihm. Die Geschwindigkeit des Fahrzeugs ist konstant $v = 30\,m/s$.



a1) Berechnen Sie die Frequenz $\tilde{f}_1$ als Funktion von *t*, mit der das von *S* ausgesendete Signal im Fahrzeug *A* registriert wird. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf dieses Signals in einem Diagramm dar.

a2) Das Fahrzeug *A* sendet nun selbst einen Ton der Frequenz $f_2 = 400Hz$ aus. Berechnen Sie die Frequenz $\tilde{f}_2$ als Funktion von *t*, mit der dieses Signal von *S* registriert wird. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf des Signals $\tilde{f}_2$ ebenfalls im Diagramm dar.

a3) Kann man die Frequenz f_2 so wählen, dass sowohl für *t* < 0 als auch für *t* > 0 die von *A* und *S* empfangenen Frequenzen $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ gleich sind? Falls ja: Berechnen Sie den Zahlenwert $\tilde{f}_2$; falls nein: Begründen Sie, warum nicht.

b.) Ein zweites Fahrzeug *B* startet zum Zeitpunkt *t* = 0 bei *S* und beschleunigt konstant mit $a = 3{,}4\,m/s^2$,d.h. für seine Geschwindigkeit gilt: $v(t) = a \cdot t$.

b1) Berechnen Sie die Frequenz $\tilde{f}_3$ als Funktion von *t*, mit der das von *S* ausgesendete Signal im Fahrzeug *B* registriert wird. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf dieses Signals in einem Diagramm dar.

b2) Das Fahrzeug *B* sendet nun selbst einen Ton der Frequenz $f_4 = 400Hz$ aus. Berechnen Sie die Frequenz $\tilde{f}_4$ als Funktion von *t*, mit der dieses Signal von *S* registriert wird.
Hinweis: Das zu einem Zeitpunkt $\tilde{t}$ ausgesendete Signal wird in *S* zu einem *späteren* Zeitpunkt *t* empfangen, weil die Laufzeit des Signals von *B* nach *S* berücksichtigt werden muss. Wie lautet der Zusammenhang zwischen $\tilde{t}$ und *t*?

Wintersemester	2011/2012	Blatt 6 (von 7)
Studiengang:	MB3 A, B, C	Semester 3
Prüfungsfach:	TM2, Teil 2: Schwingungslehre	Prüfungsnummer: 3011/3012
Hilfsmittel:	Skript, Taschenrechner, Bücher	Zeit: 50 Minuten

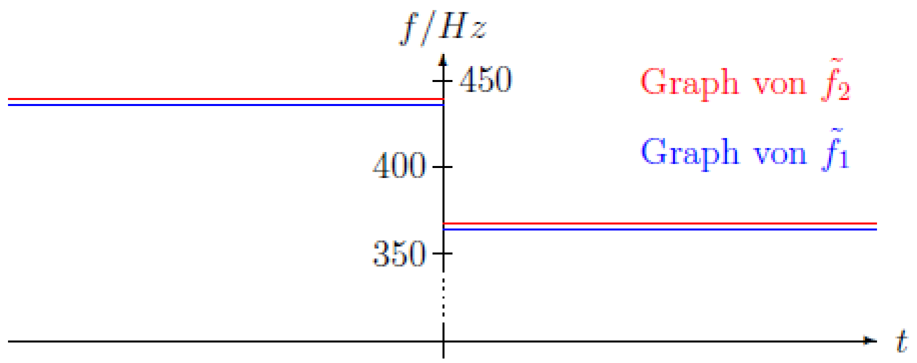
Aufgabe 3: Lösung
a.)

Für $\tilde{f}_1$ gilt (Dopplereffekt, ruhende Quelle, bewegter Beobachter)

$$\tilde{f}_1(t) = f_1 \cdot \begin{cases} \frac{c+v}{c}, & t<0 \\ \frac{c-v}{c}, & t>0 \end{cases} = \begin{cases} 435.3\,Hz, & t<0 \\ 364.7\,Hz, & t>0 \end{cases}$$

Für $\tilde{f}_2$ gilt (Dopplereffekt, bewegte Quelle, ruhender Beobachter)

$$\tilde{f}_2(t) = f_2 \cdot \begin{cases} \frac{c}{c-v}, & t<0 \\ \frac{c}{c+v}, & t>0 \end{cases} = \begin{cases} 438.7\,Hz, & t<0 \\ 367.6\,Hz, & t>0 \end{cases}$$



Damit $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ ist, muß gelten

- für $t<0$: $\quad f_1 \cdot \frac{c+v}{c} \overset{!}{=} f_2 \cdot \frac{c}{c-v} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{c^2-v^2}{c^2}$;
- für $t>0$: $\quad f_1 \cdot \frac{c-v}{c} \overset{!}{=} f_2 \cdot \frac{c}{c+v} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{c^2-v^2}{c^2}$.

Sowohl für $t<0$ als auch für $t>0$ muß man also

$$f_2 = f_1 \cdot \left(1 - \left(\tfrac{v}{c}\right)^2\right) = 396.9\,Hz$$

wählen.

Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Fakultät Grundlagen

Wintersemester	2011/2012	Blatt 7 (von 7)
Studiengang:	MB3 A, B, C	Semester 3
Prüfungsfach:	TM2, Teil 2: Schwingungslehre	Prüfungsnummer: 3011/3012
Hilfsmittel:	Skript, Taschenrechner, Bücher	Zeit: 50 Minuten

b.)

Für $\tilde{f}_3$ gilt (Dopplereffekt, ruhende Quelle, bewegter Beobachter)

$$\tilde{f}_3(t) \;=\; f_1 \cdot \frac{c - at}{c} \;=\; f_1 \cdot \left(1 - \frac{a}{c} \cdot t\right) \;=\; 400\,Hz \cdot \left(1 - 0.01\tfrac{1}{s} \cdot t\right).$$

Zum Zeitpunkt $\tilde{t}$ gilt:

- Fahrzeuggeschwindigkeit $v(\tilde{t}) \;=\; a\tilde{t}$
- Fahrzeugposition $x(\tilde{t}) \;=\; \frac{a\tilde{t}^2}{2}$

Das zum Zeitpunkt $\tilde{t}$ vom Fahrzeug ausgesandte Signal trifft in S also zum Zeitpunkt

$$t \;=\; \tilde{t} \;+\; \frac{x(\tilde{t})}{c} \;=\; \tilde{t} \;+\; \frac{a\tilde{t}^2}{2c} \qquad (\dagger)$$

ein. Für $\tilde{f}_4$ gilt (Dopplereffekt, bewegte Quelle, ruhender Beobachter)

$$\tilde{f}_4(t) \;=\; f_4 \cdot \frac{c}{c + a\tilde{t}}\,. \qquad (\ddagger)$$

Jetzt muß noch die Beziehung $(\dagger)$ nach $\tilde{t}$ aufgelöst werden:

$$\tilde{t}^2 + \frac{2c}{a}\,\tilde{t} - \frac{2c}{a}\,t \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \tilde{t} \;=\; -\frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{2ct}{a}}$$

Weil $\tilde{t}$ mit wachsendem t ebenfalls wächst ist in dieser Formel „+“ das einzig richtige Vorzeichen.

Setzt man diese Beziehung in $(\ddagger)$ ein, so erhält man schließlich

$$\tilde{f}_4(t) \;=\; f_4 \cdot \frac{c}{\sqrt{c^2 + 2act}} \;=\; f_4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2a}{c} \cdot t}} \;=\; 400\,Hz \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 0.02\frac{1}{s} \cdot t}}\,.$$