Technische Physik, WS 2010/11 – Lösung

Aufgabe 1:

(a) Das Massenträgheitsmoment bezogen auf die Drehachse beträgt (Satz von Steiner)

$$J_A \;=\; J_S \;+\; mx^2 \;=\; m\big(\frac{r^2}{2} + x^2\big)\,;$$

das Rückstellmoment bei Auslenkung aus der Gleichgewichtslage ist

$$M \;=\; -k_D \cdot \varphi \;+\; mgx \cdot \sin(\varphi)\,.$$

Nach dem zweiten Newton'schen Axiom für Rotationsbewegungen folgt

$$m\big(\frac{r^2}{2} + x^2\big) \cdot \ddot{\varphi} \;=\; -k_D \cdot \varphi \;+\; mgx \cdot \sin(\varphi)\,.$$

Für kleine $|\varphi|$ kann man linearisieren und erhält

$$\big(\frac{r^2}{2} + x^2\big) \cdot \ddot{\varphi} \;+\; \big(\frac{k_D}{m} - gx\big) \cdot \varphi \;=\; 0\,.$$

(b) Es ist

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{k_D/m - gx}{r^2/2 + x^2}}\,, \qquad T_0 \;=\; 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^2/2 + x^2}{k_D/m - gx}}\,.$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten folgt

$$T_0 \;=\; 1.787\,s$$

Damit schlägt das Pendel

$$n \;=\; \frac{60\,s}{T_0} \cdot 2 \;\approx\; 67 \text{ Mal pro Minute.}$$

(c) Bei Stokes'scher Reibung ist

$$\frac{E(t+T_d)}{E(t)} \;=\; e^{-2\delta T_d}\,.$$

Mit

$$\delta T_d \;=\; D\omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-D^2}} \;\approx\; 2\pi D \qquad \text{(schwache Dämpfung)}$$

folgt für den relativen Energieverlust r pro Periode

$$r \;=\; \frac{E(t) - E(t+T_d)}{E(t)} \;=\; 1 - e^{-4\pi D} \;=\; 0.222\,.$$

Der prozentuale Energieverlust pro Periode beträgt damit

$$p \;=\; 22.2\,\%\,.$$

(d) Bei den gegebenen Anfangsbedingungen ist die kinetische Energie $E_{kin} = 0$.

Erster Lösungsweg: Um die Formel

$$E(T_d) \;=\; E(0) \cdot e^{-2\delta T_d} \;=\; E(0) \cdot e^{-4\pi D}$$

zur Berechnung der Restenergie nach einer Periode anwenden zu können, muß die Gesamtenergie in der Ruhelage (Gleichgewichtslage) Null sein. Der Nullpunkt der potentiellen Energie (Energie im Schwerefeld) muß also bei $\varphi = 0°$ gewählt werden.

Die Gesamtenergie zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt dann

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{k_D}{2} \cdot \varphi_{max}^2 \; + \; mgx \cdot \big(\cos(\varphi_{max}) - 1\big) \; = \\ &= 1.066 \cdot 10^{-4}\,J \; - \; 8.942 \cdot 10^{-5}\,J \; = \; 1.719 \cdot 10^{-5}\,J\,. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(0) \cdot \big(1 - e^{-4\pi D}\big) \; = \\ &= \left(\frac{k_D}{2} \cdot \varphi_{max}^2 \; + \; mgx \cdot \big(\cos(\varphi_{max}) - 1\big)\right) \cdot \big(1 - e^{-4\pi D}\big) \; = \; 3.821\,\mu J\,. \end{aligned}$$

Der Antrieb muß also pro Periode T_d die Energie ΔE zuführen. Mit

$$T_d \; \approx \; T_0 \; = \; 1.787\,s$$

nach Aufgabenteil **(b)** (das genügt für die Abschätzung) entspricht das der Antriebsleistung

$$P \; = \; \frac{\Delta E}{T_d} \; = \; 2.138\,\mu W\,.$$

Zweiter Lösungsweg: Die linearisierte Differentialgleichung aus Aufgabenteil **(a)** wird durch den Stokes'schen Dämpfungsterm ergänzt und lautet dann nach Normierung

$$\ddot{\varphi} \; + \; 2\delta \cdot \dot{\varphi} \; + \; \frac{k_D/m - gx}{r^2/2 + x^2} \cdot \varphi \; = \; 0$$

bzw. mit den Bezeichnungen von oben und $D = \delta/\omega_0$

$$\ddot{\varphi} \; + \; 2D\omega_0 \cdot \dot{\varphi} \; + \; \omega_0^2 \cdot \varphi \; = \; 0\,.$$

Diese Differentialgleichung besitzt die allgemeine Lösung

$$\varphi(t) \; = \; e^{-\delta t} \cdot \big(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\big)\,.$$

Mit den gegebenen Anfangswerten ergibt sich

$$\varphi(t) \; = \; \varphi_{max} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\delta}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right)$$

(den Vorfaktor vor dem Sinusterm braucht man dabei eigentlich gar nicht auszurechnen, weil im weiteren nur $\varphi(0)$ und $\varphi(T_d)$ gebraucht wird.) Es ist also

$$\varphi(0) \; = \; \varphi_{max}\,, \qquad \varphi(T_d) \; = \; \varphi_{max} \cdot e^{-\delta T_d} \; = \; \varphi_{max} \cdot e^{-2\pi D}\,.$$

Für die Energiedifferenz ΔE berechnet man nun

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(0) - E(T_d) \; = \\ &= \frac{k_D}{2}\,\varphi_{max}^2 \cdot \big(1 - e^{-4\pi D}\big) \; + \; mgx \cdot \Big(\cos(\varphi_{max}) - \cos(\varphi_{max} \cdot e^{-2\pi D})\Big) \; = \\ &= 2.369 \cdot 10^{-5}\,J \; - \; 1.983 \cdot 10^{-5}\,J \; = \; 3.860 \cdot 10^{-6}\,J\,. \end{aligned}$$

(Da hier nur Differenzen der potentiellen Energie betrachtet werden, kann man den Nullpunkt beliebig wählen.) Mit diesem Wert ergibt sich für die Antriebsleistung wie oben

$$P \; = \; \frac{\Delta E}{T_d} \; = \; 2.160\,\mu W\,.$$

Bemerkung: Daß die Zahlenwerte der beiden Lösungswege nicht exakt übereinstimmen liegt an der Nichtlinearität der Schwingung: Bei den Lösungswegen wurde an unterschiedlichen Stellen linearisiert.

(e) Der Amplitudenfrequenzgang für die erzwungene Schwingung lautet mit $\eta := \omega_e/\omega_0$

$$V(\eta) \;=\; \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 \;+\; (2D\eta)^2}} \,.$$

Das Verhältnis der Schwingungsamplitude bei η zur Schwingungsamplitude bei $\eta_0 = 1$ ist damit gegeben durch

$$\frac{V(\eta)}{V(1)} \;=\; \frac{2D}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 \;+\; (2D\eta)^2}} \,.$$

Für den angegebenen Wert von f_e ist $\eta = 0.9$, und man erhält

$$\frac{V(0.9)}{V(1)} \;=\; 0.207 \,;$$

die Amplitude der Schwingung nimmt also um

$$p \;=\; (1-0.207)\cdot 100\% \;=\; 79.3\%$$

gegenüber dem Wert bei $\eta = 1$, also $f_e = f_0$ ab.

Aufgabe 2:

(a) Mit dem Querschnitt A und der Dichte ρ des Seils ist

$$c \;=\; \sqrt{\frac{F}{\rho\cdot A}} \;=\; \sqrt{\frac{F}{\mu}}\,; \qquad f \;=\; \frac{c}{\lambda}\,.$$

Mit den in SI-Einheiten umgerechneten Zahlenwerten erhält man daraus

$$c \;=\; \sqrt{\frac{14.4\,N}{0.1\,kg/m}} \;=\; 12\,m/s\,, \qquad f \;=\; \frac{12\,m/s}{3\,m} \;=\; 4\,Hz\,.$$

(b) Mit der Intensität S der Welle gilt

$$P \;=\; A\cdot S \;=\; A\cdot\frac{\rho}{2}\,\omega^2\hat{y}^2\cdot c \;=\; \frac{\mu}{2}\,(2\pi f)^2\hat{y}^2\cdot c \;=\; 15.16\,W\,.$$

Aufgabe 3:

(a) Dopplereffekt mit bewegtem Sender und ruhendem Empfänger:

- Sender entfernt sich vom Empfänger mit Geschw. v: $\quad f_{E1} \;=\; \dfrac{1}{1+v/c}\cdot f_S$
- Sender bewegt sich mit Geschw. v auf den Empfänger zu: $\quad f_{E2} \;=\; \dfrac{1}{1-v/c}\cdot f_S$

Für das vom Empfänger registrierte Frequenzverhältnis gilt also

$$\frac{f_{E2}}{f_{E1}} \;=\; \frac{1+v/c}{1-v/c} \;=\; \frac{c+v}{c-v}\,.$$

Aus der Vorgabe $f_{E2}/f_{E1} \stackrel{!}{=} 2^{1/12}$ folgt also

$$\frac{c+v}{c-v} \;\stackrel{!}{=}\; 2^{1/12} \qquad\Longrightarrow\qquad v \;=\; \frac{2^{1/12}-1}{2^{1/12}+1}\cdot c \;=\; 9.817\,m/s\,,$$

Aus $v = \omega r = 2\pi f\cdot r$ forgt für die Frequenz f bzw. die Drehzahl n, mit der sich der Teller drehen muß,

$$f \;=\; \frac{v}{2\pi r} \;=\; 8.680\,Hz \qquad \text{bzw.} \qquad n \;=\; 60\cdot f \;=\; \frac{30}{\pi}\cdot\frac{v}{r} \;=\; 520.8\,min^{-1}$$