Technische Mechanik 2, SS 2010 – Lösungen

Aufgabe 1:

(a) Das Massenträgheitsmoment ist gleich dem Massenträgheitsmoment einer einfachen Scheibe mit Durchmesser D, denn die fehlende Masse der kleinen, entfernten Scheibe wird durch die Masse der zweiten kleinen Scheibe mit doppelter Dichte gerade kompensiert, und die beiden kleinen Scheiben liegen symmetrisch zur Rotationsachse. Also:

$$J_A \;=\; \frac{m}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^2 \;=\; 0.099\,kg\,m^2\,.$$

(b) Die Masse der doppelt gelochten großen Scheibe führt aus Symmetriegründen nicht zu einem Rückstellmoment; daher muß nur die untere kleine Scheibe für das Rückstellmoment berücksichtigt werden.

Die Masse der unteren kleinen Scheibe beträgt

$$m_u \;=\; \frac{m}{2}$$

(doppelte Dichte, halber Radius der großen Scheibe). Damit wird

$$M \;=\; -m_u g \cdot \frac{D}{4} \cdot \sin(\beta) \;=\; -\frac{m}{2} \cdot g \cdot \frac{D}{4} \cdot \sin(\beta) \;=\; -0.281\,Nm\,.$$

(c) Zunächst ist

$$J_A \cdot \ddot{\beta} \;=\; M$$

und damit

$$\ddot{\beta} \;+\; \frac{g}{D} \cdot \sin(\beta) \;=\; 0\,.$$

Die Periodendauer erhält man nach Linearisierung:

$$T_0 \;=\; \frac{2\pi}{\omega_0} \;=\; 2\pi \cdot \sqrt{\frac{D}{g}} \;=\; 1.554\,s$$

(d) Aus

$$\frac{1}{3} \;\stackrel{!}{=}\; \frac{x(3T_d)}{x(0)} \;=\; e^{-\delta \cdot 3T_d}$$

folgt zunächst

$$3\delta T_d \;=\; \ln(3)\,.$$

Mit

$$\delta \;=\; \vartheta \cdot \omega_0\,, \qquad T_d \;=\; \frac{2\pi}{\omega_d} \;=\; \frac{2\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-\vartheta^2}}$$

ergibt sich

$$\frac{6\pi\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}} \;=\; \ln(3)$$

und daraus mit $a := \ln(3)/6\pi$

$$\vartheta \;=\; \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \;=\; 0.0582\,.$$

Alternative: Sehr schwache Dämpfung,

$$T_d \;\approx\; T_0 \;=\; \frac{2\pi}{\omega_0}\,, \qquad \vartheta \;\approx\; \frac{\ln(3)}{6\pi} \;=\; 0.0583\,.$$

Für die Dämpfungskonstante erhält man schließlich

$$\delta \;=\; \vartheta \cdot \omega_0 \;=\; \vartheta \cdot \sqrt{\frac{g}{D}} \;=\; 0.236\, s^{-1}\,.$$

Aufgabe 2:

(a) Der Schallintensitätspegel L_I hängt mit der Schallintensität I zusammen über

$$L_I \;=\; 10 \cdot \lg\Big(\frac{I}{I_0}\Big)\, dB\,.$$

Für 5 identische Schallquellen ist also

$$L_{5I} \;=\; 10 \cdot \lg\Big(\frac{5I}{I_0}\Big)\, dB \;=\; 10 \cdot \lg(5)\, dB \;+\; 10 \cdot \lg\Big(\frac{I}{I_0}\Big)\, dB \;=\; 10 \cdot \lg(5)\, dB \;+\; L_I\,.$$

Damit ist

$$L_{5I} \;-\; L_I \;=\; 10 \cdot \lg(5)\, dB \;=\; 7\, dB\,.$$

(b) Für eine Kugelwelle gilt

$$I(d) \;=\; I(d_0) \cdot \big(\tfrac{d_0}{d}\big)^2\,.$$

Schallpegel von 5 Schallquellen im Abstand d_1:

$$L_{5I}(d_1) \;=\; 10 \cdot \lg\Big(5 \cdot \frac{I(d_0)}{I_0} \cdot \big(\tfrac{d_0}{d_1}\big)^2\Big)\, dB$$

Schallpegel von 1 Schallquelle im Abstand d_2:

$$L_I(d_2) \;=\; 10 \cdot \lg\Big(\frac{I(d_0)}{I_0} \cdot \big(\tfrac{d_0}{d_2}\big)^2\Big)\, dB$$

Die beiden Intensitäten sollen gleich groß sein:

$$10 \cdot \lg\Big(5 \cdot \frac{I(d_0)}{I_0} \cdot \big(\tfrac{d_0}{d_1}\big)^2\Big)\, dB \;\stackrel{!}{=}\; 10 \cdot \lg\Big(\frac{I(d_0)}{I_0} \cdot \big(\tfrac{d_0}{d_2}\big)^2\Big)\, dB$$

Daraus

$$d_2 \;=\; \frac{d_1}{\sqrt{5}}\,.$$

Aufgabe 3:

(a) Die Beziehung zwischen Auslenkungsamplitude $\hat{y}$ und Beschleunigungsamplitude $\hat{a}$ bei einer harmonischen Schwingung lautet

$$\hat{a} \;=\; \omega^2 \cdot \hat{y} \;=\; 4\pi^2 f^2\, \hat{y}\,.$$

Daraus

$$f \;=\; \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\hat{a}}{\hat{y}}}\,.$$

Es soll $\hat{a} \geqslant g$ sein; mit $\hat{y} = 2\,\mu m$ folgt also

$$f \;\geqslant\; \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{\hat{y}}} \;=\; 352.5\, Hz\,.$$

(b) Die Wellengleichung lautet für harmonische Kugelwellen (für $r > 0$)

$$y(r,t) \;=\; \frac{\hat{y}}{r} \cdot \cos(\omega t - kr + \varphi_0)\,.$$

Mit der Grenzfrequenz $f_{gr} \;=\; \sqrt{\frac{g}{\hat{y}}} \cdot \frac{1}{2\pi}$ ist

$$
\begin{aligned}
k_{gr} &= \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f_{gr}}{c} = \sqrt{\frac{g}{\hat{y}}} \cdot \frac{1}{c} = 6.51\, m^{-1}\,, \\
\omega_{gr} &= 2\pi f_{gr} = \sqrt{\frac{g}{\hat{y}}} = 2\,214.7\, s^{-1}
\end{aligned}
$$

und (φ_0 ist ein beliebiger Phasenwinkel)

$$
y(r,t) = \frac{\hat{y}}{r} \cdot \cos(\omega_{gr} t - k_{gr} r + \varphi_0)\,.
$$