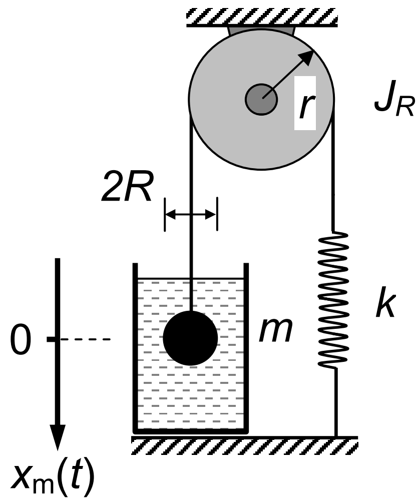
Sommersemester	2009	Blatt 1 (von 3)
Studiengang:	MB3 A / B	Semester 3
Prüfungsfach:	TM2, **Teil 2**: **Schwingungslehre** (Bitte Teil 2 separat austeilen)	Fachnummer: 3011 3012
Hilfsmittel:	Manuskript, Literatur, Taschenrechner	*Zeit: 50 Minuten*

Gesamtpunktzahl: 50

Aufgabe 1: Viskosimeter (20 Punkte)

Um die Viskosität η eines Öls zu bestimmen, wird die Frequenz der gedämpften Schwingung einer Stahlkugel gemessen. Die Kugel hängt an einem Faden, der über eine Umlenkrolle geführt und an einer Feder befestigt ist. Die Faden- und die Federmasse können vernachlässigt werden (siehe Skizze).

Für die geschwindigkeitsproportionale viskose Reibungskraft der Kugel in Öl gilt nach Stokes: $F_R = 6\,\pi\,\eta\,R\,v$.



1) Einfaches Modell: ohne Berücksichtigung des Massenträgheitsmomentes J_R der Umlenkrolle

a) Stellen Sie die Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung der Kugel in Öl auf.

b) Eine Messung der Frequenz der gedämpften Schwingung ergibt $f_d = 1{,}275$ Hz . Berechnen Sie daraus den Dämpfungsgrad D und die Viskosität η des Öls.

Federkonstante $k = 13\ \mathrm{Nm^{-1}}$, Kugelmasse $m = 200$ g , Kugelradius $R = 1{,}8$ cm.

2) Erweitertes Modell: mit Berücksichtigung des Massenträgheitsmomentes J_R der Umlenkrolle vom Radius *r*.

c) Stellen Sie die Differentialgleichung für das erweiterte Modell auf.

d) Wie verändert sich das Resultat für die Viskosität im Vergleich zu dem einfachen Modell ? (Qualitative Antwort mit Begründung).

<u>Lösungsvorschlag :</u> **Viskosimeter** **(Hanno Käß)**

a) Differentialgleichung folgt aus 2. Axiom: $m\,\ddot{x} = Summe\ Kräfte\ auf\ \ Kugel$

Diese sind die Rückstellkraft der Feder $F_F = -k\ x$

und die Reibungskraft nach Stokes : $F_R = -6\ \pi\ \eta\ R\ v = -\,d\ v$

Dabei entspricht der Nullpunkt von x der Ruhelage der Kugel, die zugehörige Vorspannung der Feder gleicht die Gewichtskraft der Kugel aus.

Somit gilt $m\,\ddot{x} = F_F + F_R = -k\ x - 6\ \pi\ \eta\ R\ \dot{x}$

oder umgestellt $m\,\ddot{x} + 6\ \pi\ \eta\ R\ \dot{x} + k\ x = 0$

b) In der Standardform $m\,\ddot{x} + d\ \dot{x} + k\ x = 0$ gilt :

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ $\omega_d = 2\ \pi\ \ f_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ $\delta = d/2m$

aus den Daten folgt $\omega_d = 2\ \pi\,1{,}275\ \mathrm{Hz} = 8{,}0111\ \mathrm{rad/s}$

$\omega_0 = \sqrt{13\mathrm{kg\,m}/(0{,}2\ \mathrm{kg\,m\,s^2})} = 8{,}0623\ \mathrm{rad/s}$

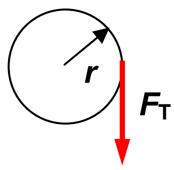
$\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_d^2} = 0{,}9071\,1/\mathrm{s}$

Koeffizientenvergleich ergibt $\delta = d/2m = 3\ \pi\ \eta\ R/m$

und es ergibt sich damit $\eta = \delta\ m/(3\ \pi\ R) = 1{,}0694\ \mathrm{kg/(ms)}$

$D = \delta/\omega_0 = 0{,}1125$

c) Wird das Massenträgheitsmoment J_R der Rolle ebenfalls berücksichtigt, wird die Differentialgleichung um die Kraft F_T ergänzt, welche benötigt wird, um die Rolle in Rotation zu versetzen. Sie folgt aus dem Drehmoment M_T mit



$M_T = J_R\alpha = F_T\ r$ wobei $\alpha = \ddot{x}/r$

also ist $F_T = J_R\alpha/r = J_R\ \ddot{x}/r^2$

und damit lautet die DGL $m\,\ddot{x} + F_R = \ddot{x}\,(m + J_R/r^2) = -k\ x - 6\ \pi\ \eta\ R\ \dot{x}$

$\ddot{x}\,(m + J_R/r^2) + 6\ \pi\ \eta\ R\ \dot{x} + k\ x = 0$ mit $\omega_0' = \sqrt{k/(m + J_r/r^2)}$

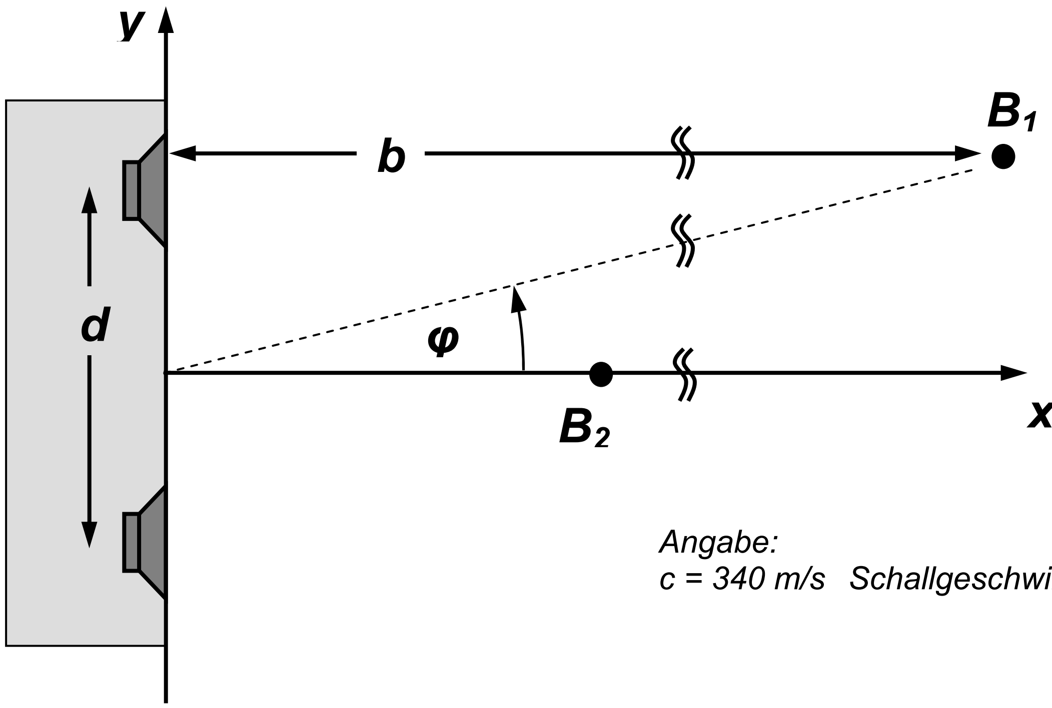
d) In Wirklichkeit ist die gemessene freie Kreisfrequenz ω'_0 also kleiner als der theoretische Wert ω_0 nach dem einfachen Modell. Das heißt, die tatsächliche Geschwindigkeit v' der Kugel ist kleiner als v im einfachen Modell. Der nach diesem Modell in b) berechnete Wert η für die Viskosität ist demnach **zu klein**.

Unter Berücksichtigung von J_R gilt $\eta' = \dfrac{\delta}{3\pi R}\left(m + \dfrac{J_R}{r^2}\right) > \eta$

Sommersemester 2009		Blatt 2 (von 3)
Studiengang:	MB3 A / B	Semester 3
Prüfungsfach:	TM2, Teil 2: Schwingungslehre	Fachnummer: 3011 / 3012

Aufgabe 2: Open Air Konzert **(20 Punkte)**

Für ein Open-Air Konzert wurden zwei Lautsprecher im Abstand von $d = 8$ m und symmetrisch zu einer gedachten x-Achse auf einer Bühne aufgestellt. Nachfolgend ist anzunehmen, dass sie selbst keine Richtwirkung haben und ideale Punktquellen sind. Die gesamte umgebende Fläche (Zuschauerbereich, Wiese) bestehe aus idealen Schallabsorbern (siehe Skizze).



Angabe:
c = 340 m/s Schallgeschwindigkeit

Ein Besucher B_1 steht im senkrechten Abstand $b >> d$ zur Bühne – also **weit entfernt** - im Zuschauerbereich.

a) Die baugleichen Lautsprecher werden phasengleich und parallel mit Wechselspannung der Frequenz $f = 70$ Hz angesteuert. Unter welchen Winkelrichtungen φ zur x-Achse im Intervall [-90°< φ < 90°] registriert B_1 Lautstärkemaxima ?

b) Unterhalb welcher Grenzfrequenz f_{min} existiert im genannten Winkelintervall nur noch ein Lautstärkemaximum ?

Eine zweiter Besucher B_2 steht auf der x-Achse im Abstand $b = 20$ m zur Bühne.

c) Welche Intensität hat der Schall am Ort von B_2, wenn der Pegel 103 dB beträgt ?

d) Welche Schallleistung gibt jeder Lautsprecher ab und welche elektrische Leistung nimmt er auf, wenn sein Wirkungsgrad 3 % beträgt ?

e) In welcher Entfernung b beträgt der Pegel erträgliche 60 dB (Zimmerlautstärke) ?

<u>Lösungsvorschlag :</u> **Open Air Konzert** **(Hanno Käß)**

a) Interferenzmaxima treten auf für : $\sin \alpha_m = m\lambda / d$

Mit der Wellenlänge $\lambda = c \cdot f =$ **4,86 m**

ergeben sich folgende Winkelrichtungen $\alpha_0 =$ **0°**

α_1 = arc sin (4,86/8) = **37,38°**

α_{-1} = arc sin (- 4,86/8) = **-37,38°**

Maxima höherer Ordnung treten keine auf

b) Wenn die Wellenlänge größer als der Lautsprecherabstand wird ($\lambda > d$) treten **keine** Maxima höherer Ordnung als Null auf. Der Grenzwert λ_{max} beträgt also

$\lambda_{max} = d = 8$ m und damit ist $f_{min} = c / \lambda_{max} =$ **42,5 Hz**

c) Intensitätspegel 103 dB bedeutet $L_I = 10 \lg \frac{I}{I_0} \mathrm{dB} = 103 \,\mathrm{dB}$

also $\lg \frac{I}{I_0} = \frac{103}{10} = 10{,}3$ $\frac{I}{I_0} = 10^{10{,}3}$ $I = I_0 \; 10^{10{,}3} = 10^{-12} \; 10^{10{,}3} \;\mathrm{W/m^2}$

und damit ist die Intensität $I = 10^{-1{,}7}$ W/m² = **$1{,}995 \cdot 10^{-2}$ W/m²**

d) Der Pegel jedes der beiden Lautsprecher am Ort des Beobachters B_2 beträgt 100 dB (Halbierung der Intensität bedeutet Pegelabnahme um - 3 dB !), dies bedeutet einen Intensitätsanteil I_L pro Lautsprecher am Ort B_2 von

$$I_L = 10^{-12} \; 10^{10} \;\mathrm{W/m^2} = 1{,}00 \cdot 10^{-2} \;\mathrm{W/m^2}$$

Der Abstand r des Beobachters B_2 zu jedem der beiden Lautsprecher beträgt

(Satz des Pythagoras) $r = \sqrt{b^2 + (d/2)^2} = 20{,}40 \;\mathrm{m}$

Die von jedem der beiden Lautsprecher abgestrahlte Leistung P_L beträgt damit

$P_L = I_L \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 416 \cdot \mathrm{m^2} \cdot 10^{-2} \;\mathrm{W/m^2} =$ **52,28 W** **Schallleistung**

Der elektrische Wirkungsgrad beträgt 3%, damit folgt die aufgenommene elektrische Leistung P_{el} pro Lautsprecher zu $P_{el} = P_L / 0{,}03 =$ **1742 W**

e) Eine Pegelabnahme von L_1 = 103 dB im Abstand r_1 = 20 m auf L_2 = 60 dB im Abstand r_2 ergibt sich für

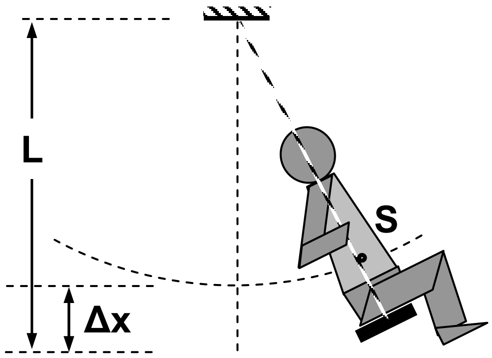
$L_1 - L_2 = 20 \lg \frac{r_2}{r_1} \mathrm{dB} = 43 \;\mathrm{dB}$ $\frac{43}{20} = 2{,}15 = \lg \frac{r_2}{r_1}$ $10^{2{,}15} = 141{,}25 = \frac{r_2}{r_1}$

Damit folgt der Abstand r_2 zu $r_2 = 141{,}25 \cdot r_1 =$ **2825 m**

Alternativ : Bei Punktquellen gilt $I_1/I_2 = (r_2/r_1)^2$ demnach $r_2 = r_1 \sqrt{(I_1/I_2)}$

Sommersemester 2009	Blatt 3 (von 3)
Studiengang: MB3 A / B	Semester 3
Prüfungsfach: TM2, Teil 2: Schwingungslehre	Fachnummer: 3011 / 3012

Aufgabe 3 **Schaukel** **(3 Punkte)**



Eine Brettschaukel hat die Seillänge L = 1,5 m.

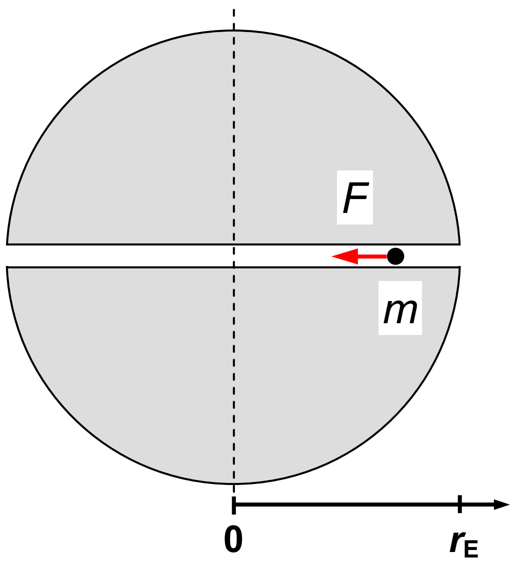
Im Sommer 2007 schaukelt ein Kind der Masse m_{07} = 12 kg darauf, sein Schwerpunkt befindet sich Δx = 10 cm über dem Brett. Die Schwingungsdauer hat den Wert T_{2007}.

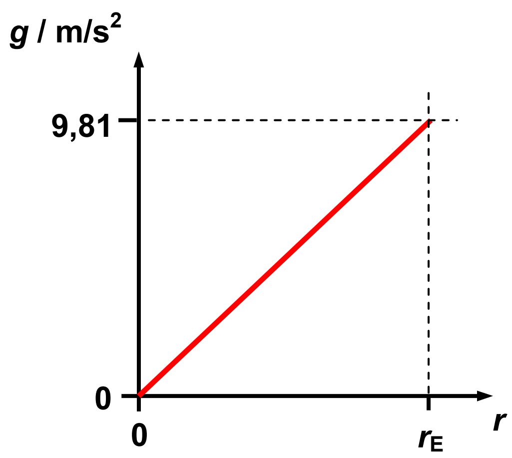
Als das Kind im Sommer 2008 wieder schaukelt, hat seine Masse um 20% zugenommen, Δx ist gleich geblieben. Die Schwingungsdauer hat den Wert T_{2008}.

Das Kind ist als Massepunkt zu betrachten. Welchen Wert hat das Verhältnis $T_{2007}/\ T_{2008}$?

Aufgabe 4 **Antipodenpendel** **(7 Punkte)**

Auf dem Weg von der Erdoberfläche zum Erdmittelpunkt nimmt die Gravitationsbeschleunigung auf eine Masse m gleichmäßig und linear auf den Wert Null ab (siehe Diagramm). Welche Periodendauer T hätte ein Körper, der in einem geraden, durch den Erdmittelpunkt gehenden Rohr, hin und her schwingt ? Reibung soll in dem Gedankenexperiment keine Rolle spielen, der Erdradius ist r_E = 6378 km.





<u>Lösungsvorschlag :</u> **Schaukel** **(Hanno Käß)**

Die Anordnung kann laut Text als mathematisches Pendel betrachtet werden. Das Kind wird durch einen Massepunkt repräsentiert. Die Schwingungsdauer T eines mathematischen Pendels beträgt

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{L_{eff}}{g}}$$

Da die Länge L_{eff} des Pendels 2007 und 2008 jeweils den gleichen Wert aufweist ($L_{eff} = L - \Delta x = 1{,}4$ m) hängt T überhaupt nicht von der Masse des Kindes ab !!

$$\boldsymbol{T_{2007}/T_{2008} = 1}$$

<u>Lösungsvorschlag :</u> **Antipodenpendel** **(Hanno Käß)**

Rückstellkraft F_R als Funktion der Koordinate r : $F_R = -a \cdot m = -m \cdot g \cdot r / r_E$

Damit wird die Schwingungsdifferentialgleichung

$$m\,\ddot{r} = -\frac{r}{r_E}\,g\,m \qquad \text{umgeformt} \qquad \ddot{r} + \frac{g}{r_E}\,r = 0$$

Die Kreisfrequenz folgt aus einem Koeffizientenvergleich zu

$$\omega_0 = \sqrt{k_{ers}/m_{ers}} = \sqrt{g/r_E} = 1{,}2402 \cdot 10^{-3}\ 1/\mathrm{s}$$

Die Periodendauer folgt damit zu $T = 2 \cdot \pi / \omega_0 =$ **5066,3 s = 1 h 24’**