Wintersemester	2008	Blatt 1 (von 3)
Studiengang:	MB3 A, B & C	Semester 3
Prüfungsfach:	TM2, **Teil 2**: **Schwingungslehre** (Bitte Teil 2 separat austeilen)	Fachnummer: 3011
Hilfsmittel:	Manuskript, Literatur, Taschenrechner	*Zeit: 50 Minuten*

Gesamtpunktzahl: 50

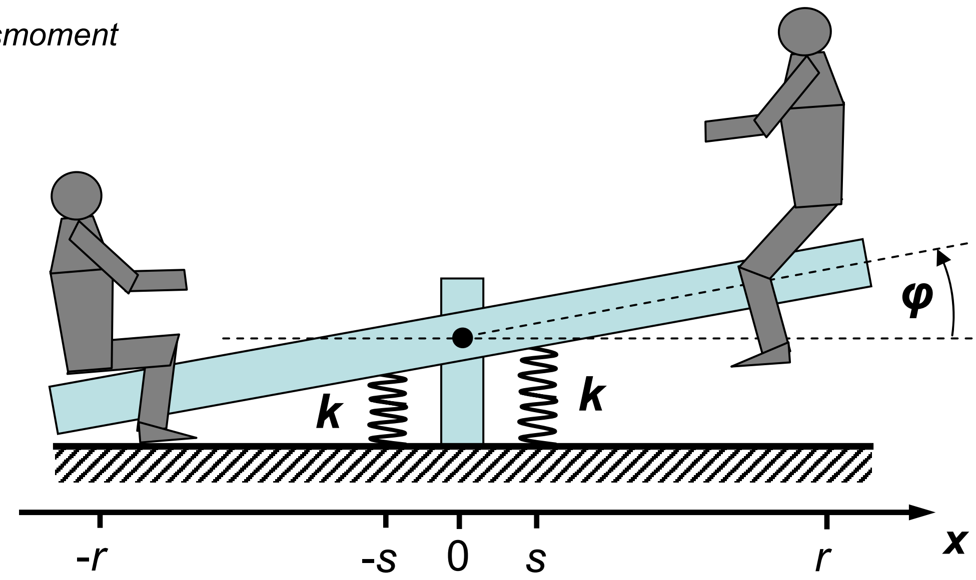
Aufgabe 1: **Wippe** **(19 Punkte)**

Eine Wippe besteht aus einem im Schwerpunkt drehbar gelagerten Balken der Masse m_B = 50 kg und der Länge L = 5 m. Im Abstand von jeweils s = 0,3 m sind symmetrisch zur Mitte zwei gleiche Federn der Federkonstante k angebracht. Im Abstand von jeweils r = 2,1 m zur Mitte sitzen zwei als Massepunkte betrachtete Kinder. Die Wippe kann um Winkel φ bis maximal 10° ausgelenkt werden. Daher bewegen sich die Kinder in guter Näherung nur vertikal.

Alle Bewegungen erfolgen reibungsfrei.

Massenträgheitsmoment des Balkens :

$$J_S = \tfrac{1}{12} m_B L^2$$



a) Wie lautet die Bewegungsgleichung des frei schwingenden Systems, wenn zwei Kinder gleicher Masse m = 22 kg darauf sitzen ?

b) Wie groß ist die Federkonstante k, wenn die Periodendauer T_0 = 1,05 s beträgt?

c) Wie groß muss die Winkelamplitude der freien Schwingung sein, damit die Kinder jeweils im oberen Umkehrpunkt vom Sitz abheben (siehe Skizze) ?

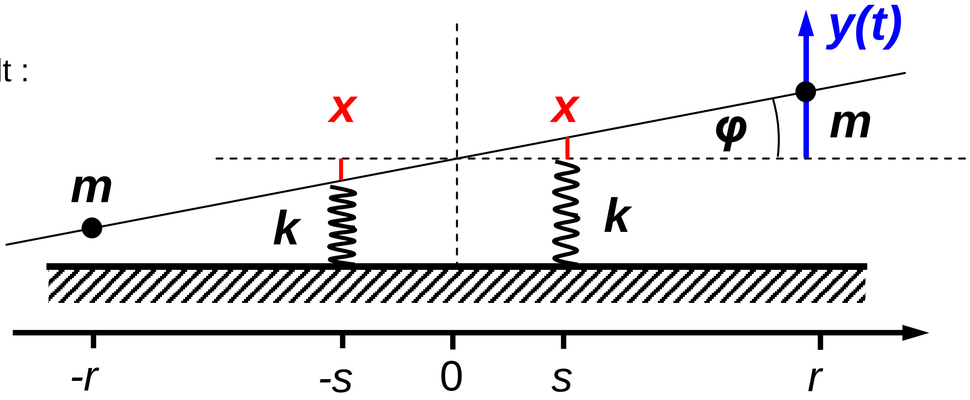
Lösungsvorschlag ***Wippe*** ***Autor: H. Käß***

Für kleine Winkel φ gilt :

$x / s = \tan \varphi \approx \varphi$

und daher wird

$x = s \cdot \varphi$



a) Der Betrag des rückstellenden Drehmoments $M_{\text{rück}}$ folgt aus der

Rückstellkraft pro Feder $|F_{\text{rück}}| = k \cdot x = k \cdot s \cdot \varphi$

und damit $|M_{\text{rück}}| = 2\, F_{\text{rück}} \cdot s = 2\, k \cdot s^2 \cdot \varphi$

Das Massenträgheitsmoment J der Gesamtanordnung (Wippe mit Kindern) beträgt

$$J = J_S + 2\, m \cdot r^2 = m_B \cdot L^2 / 12 + 2\, m \cdot r^2$$
$$= 50 \text{ kg } 25 \text{ m}^2 / 12 + 2 \cdot 22 \text{ kg } 4{,}41 \text{ m}^2$$
$$= 104{,}166 \text{ kg m}^2 + 194{,}04 \text{ kg m}^2 = 298{,}21 \text{ kg m}^2$$

Daraus folgt sofort die Bewegungsgleichung

$$M = J \cdot \alpha = \quad J \cdot d^2\varphi/dt^2 = M_{\text{rück}} = -\, 2\, k \cdot s^2 \cdot \varphi$$
$$\boldsymbol{J \cdot d^2\varphi/dt^2 \qquad + 2\, k \cdot s^2 \cdot \varphi \qquad = 0}$$

In Zahlenwerten $\boldsymbol{298{,}21 \text{ kg m}^2\, d^2\varphi/dt^2 \qquad + 0{,}18 \text{ m}^2 \cdot k \cdot \varphi \qquad = 0}$

b) Die Schwingungsdauer T_0 hängt von den Koeffizienten der Bewegungsgleichung ab

$$\omega_0 = 2\,\pi / T_0 = \sqrt{2\, k \cdot s^2 / J} = 2\,\pi / 1{,}05 \text{ s} = 5{,}984 \text{ rad/s}$$

also folgt $k = \omega_0^2\, J / (2\, s^2) \quad = 35{,}81 \cdot 298{,}21 \text{ kg} / 0{,}18 \text{ s}^2$

$$= 59324 \text{ kg/s}^2 = \mathbf{59324\ N/m}$$

c) Wenn eines der Kinder abhebt, ist die nach unten gerichtete Beschleunigung $a_y(t)$ seines Sitzplatzes auf der Wippe größer als die Erdbeschleunigung g.

Position des Sitzplatzes $y(t)$: $y(t) = \varphi(t) \cdot r = \varphi_m \cdot r \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$

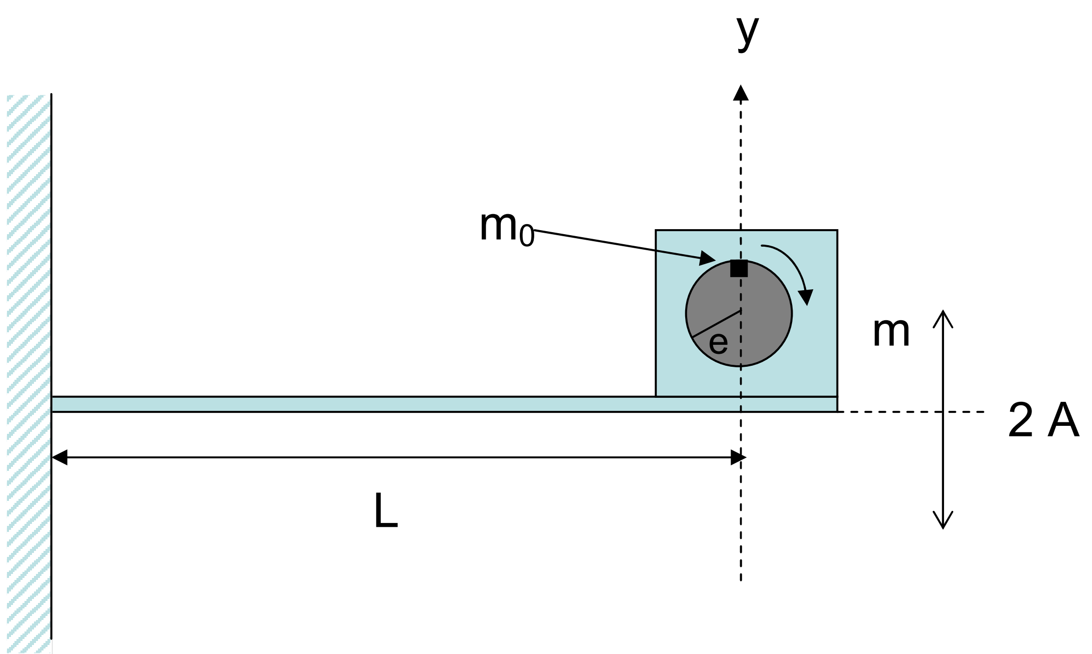
daraus Geschwindigkeit … $v_y(t) = -\, \varphi_m \cdot r \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$

und Beschleunigung … $a_y(t) = -\, \varphi_m \cdot r \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = -\, a_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$

Im Grenzfall gilt für die Beschleunigung $a_m = \varphi_m \cdot r \cdot \omega_0^2 = g$

Dies ergibt die Winkelamplitude $\varphi_m = g / (r \cdot \omega_0^2) =$ **0,1305 rad = 7,475°**

Aufgabe 2: **Unwuchterregung** **(14 Punkte)**



Auf einem einseitig eingespannten Stahlträger mit konstantem Querschnitt, Länge L=0,4m und dem Flächenmoment I_F=1,2 10^{-11} m^4 ist ein Elektromotor mit der Masse m montiert (siehe Skizze).

a) Berechnen Sie für das vereinfachte Modell - masseloser Träger und Punktmasse m=2,0 kg für den Elektromotor - die Eigenfrequenz ω_o und die Schwingungsdauer T_0 für freie, ungedämpfte Schwingungen.

Hinweis: für die Rückstellkraft gilt die Beziehung: $F_{Rü} = -\frac{3 \cdot E \cdot I_F}{L^3} \cdot y$,

E-Modul: E=2,0 10^{11} Nm^{-2}.

Bei eingeschaltetem Motor und bei einer Frequenz ω_o , führt eine Unwucht U=m_0 e - kleine Masse m_0 im Abstand e von der Rotorachse - zu einer erzwungenen vertikalen Schwingung des Motors. Die im eingeschwungenen Zustand gemessene Auslenkung beträgt 2A=1,6cm.

b) Berechnen Sie die Unwucht U des Rotors bei einem angenommenen Dämpfungsgrad D=0,05.

Lösungsvorschlag Aufgabe 2 (innere Erregung):

a)Aus der Formel für die Rückstellkraft erkennt man die Federkonstante für den Stahlträger: $C = \frac{3E \cdot I_F}{L^3} = 112{,}5\,\mathrm{Nm}^{-1}$

Damit wird die ungedämpfte Kreisfrequenz $\omega_0=\sqrt{\frac{C}{m}}=7{,}5\ s^{-1}$ und die Schwingungsdauer T_0=0,838 s.

b)Für die Amplitude A gilt im eingeschwungenen Zustand:

$$A = \frac{F_E}{C\sqrt{(1-\eta^2)+4D^2\eta^2}} = \frac{1}{C}\frac{U \cdot \omega_0^2}{2D} = 8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \quad \text{, mit } \eta=1$$

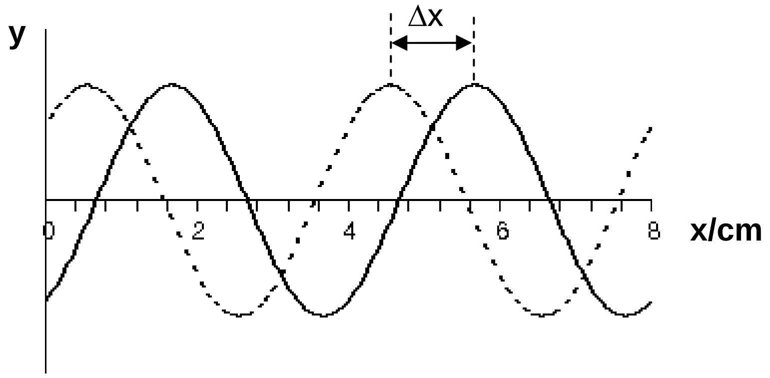
Dabei verursacht die Unwucht - $U=m_0e$ - eine innere Erregung mit der Kraftamplitude $F_E=U\ \omega_0^2$ (Zentrifugalkraft!).

Nach U aufgelöst erhält man:

$$U = A \cdot 2D \cdot C\frac{1}{\omega_o^2} = 8 \cdot 10^{-3}\mathrm{m} \cdot 0{,}1 \cdot 112{,}5\,\mathrm{Nm}^{-1} \cdot 0{,}01778\,\mathrm{s}^{-2} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}$$

Aufgabe 3 **Wellenüberlagerung** **(8 Punkte)**

Zwei Sinuswellen y_1 und y_2 (mit gleicher Amplitude, gleicher Wellenlänge und gleicher Frequenz) werden durch die Funktionen $y_1 = y_m \sin(k\,x + \omega\,t + \phi_1)$ und $y_2 = y_m \sin(k\,x + \omega\,t + \phi_2)$ beschrieben. Im Bild ist die Momentaufnahme zum Zeitpunkt t = 0 zu sehen.



a) Bestimmen Sie die Phasenverschiebung $\Delta\phi$ zwischen den beiden Wellen. (Hinweis: Am schnellsten geht es über den Zahlenwert von Δx in cm)

b) Ergibt sich bei einer Überlagerung der beiden Wellen (also $y = y_1 + y_2$) eine fortlaufende oder eine stehende Welle? (Begründung!)

c) Berechnen Sie, welches Vielfache von y_m die Amplitude der neuen Wellenfunktion y hat?

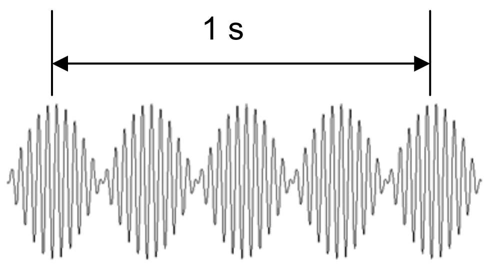
Angabe: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Aufgabe 4 **Schallintensität** **(4 Punkte)**

Um welchen Prozentsatz erhöht sich die Energie, die pro Sekunde und m^2 an Ihrem Trommelfell ankommt, wenn der Schallintensitätspegel L in einem Raum um 1 dB zunimmt?

Aufgabe 5 **Schwebung** **(4 Punkte)**

Die A Saite einer Geige ist ein wenig zu stark gespannt. Eine Stimmgabel, die exakt den Kammerton A (440 Hz) produziert, schwingt nun gleichzeitig mit der Geigensaite. In der wahrgenommenen Schwebung kann man 4 Lautstärkemaxima während einer Sekunde hören (s. Fig.).



Mit welcher Frequenz schwingt die Saite?

Lösungsvorschlag ***Wellenüberlagerung*** ***Autor: T. Hanak***

a) Aus der Skizze : $\Delta x \approx 1.1\ cm$, $\lambda = 4\ cm$

Mit $\Delta x = \frac{\Delta \phi}{k}$ und $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4\ cm} \approx 1.57\ \frac{1}{cm}$

$\Rightarrow \underline{\Delta \phi} = k\ \Delta x = (1.57\ \frac{1}{cm})(1.1\ cm) \approx \underline{1.73}\ rad$

Bem: $\Delta \phi = \phi_1 - \phi_2$ wobei $\phi_1 \approx -50^0$ $\quad \hat{=}\ 99^0$

$\phi_2 \approx -150^0$

b.) y_1 und y_2 laufen beide nach links und deshalb ergibt sich eine fortlaufende Welle.

c.) Die Überlagerung ergibt

$$y = y_1 + y_2 = \underbrace{2\, y_m \cos \frac{\Delta \phi}{2}}_{A_{neu}} \sin \left(kx - \omega t + \frac{\Delta \phi}{2}\right)$$

Also: $\underline{A_{neu}} \approx 2 \cos \left(\frac{99^0}{2}\right) y_m \approx \underline{1.30}\ y_m$

Lösungsvorschlag ***Schallintensität*** ***Autor: T. Hanak***

Aus $L = (10\ dB) \log \frac{I}{I_0}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{L_1 - L_2}_{\Delta L = 1\ dB} = (10\ dB) \log \left(\frac{I_1}{I_0} \frac{I_0}{I_2}\right)$

$\Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{\Delta L}{10\ dB}} = 10^{0.1} \approx 1.26$

Da $I \sim \Delta E$ $\Rightarrow$ Die Energie, die pro s und m^2 ankommt, erhöht sich um $\approx 26\%$.

Lösungsvorschlag ***Schwebung*** ***Autor: T. Hanak***

4 Lautstärkemaxima pro s $\Rightarrow$ Frequenz der Amplitude $= 2\ Hz$ (s. Bild)

Mit $f = \frac{f_1 - f_2}{2}$ $\Rightarrow$ $f_1 = 2f + f_2 = 2\,(2\ Hz) + 440\ Hz$

$\underline{f_1 = 444\ Hz}$

Bem: $f_1 > f_2$, weil Saite zu stark gespannt ist.