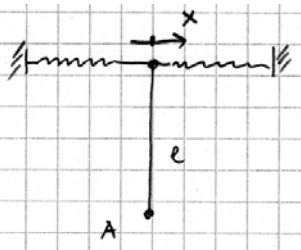
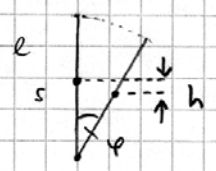
Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:





Aus der Skizze:

$$h = \frac{l}{2}\left(1 - \cos\varphi\right)$$

Mit $\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$

Für kleine Winkel: $x = \varphi l$

$$\Rightarrow \quad h \approx \frac{1}{4} l \varphi^2$$

EES: $E_{kin} + E_{pot} = \text{const.}$

$$\frac{1}{2} J_A \omega^2 + 2\left(\frac{1}{2} k x^2\right) - m g h = \text{const.}$$

Mit $J_A = \frac{1}{3} m l^2$, $\omega = \dot{\varphi}$ und $x = \varphi l$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2 + k l^2 \varphi^2 - m g \frac{l}{4} \varphi^2 = \text{const.}$$

Nach der Zeit ableiten:

$$\frac{1}{6} m l^2 \cancel{2}\cancel{\dot{\varphi}}\ddot{\varphi} + \left(k l^2 - \frac{1}{4} m g l\right) \cancel{2}\varphi\cancel{\dot{\varphi}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{6\left(k l^2 - \frac{1}{4} m g l\right)}{m l^2} \varphi = 0$$

oder $$\boxed{\ddot{\varphi} + \left(\frac{6k}{m} - \frac{3}{2}\frac{g}{l}\right)\varphi = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{3k}{m} - \frac{3}{2}\frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6k}{m} - \frac{3}{2}\frac{g}{l}}}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

Geg: $T_d = 0.1\,s$, $m = 5\,kg$, $\frac{A(t+T_d)}{A(t)} = 0.8$

$A_e = 0.5\,mm$ (quasi stat. Anregung, $f_e \to 0$)

a.) Abklingkonstante δ :

$$\delta = -\frac{1}{T_d} \ln \frac{A(t+T_d)}{A(t)} = -\frac{1}{0.1\,s} \ln(0.8)$$

$$\delta \approx 2.23\,\frac{1}{s}$$

b.) Aus $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{0.1}\right)^2 + \left(2.23\,\frac{1}{s}\right)^2}$$

$$\omega_0 \approx 62.9\,\frac{rad}{s}$$

Mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\Rightarrow$ $k = \omega_0^2\, m$

$$= \left(62.9\,\frac{rad}{s}\right)^2 (5\,kg)$$

$$k \approx 1.98 \times 10^4\,\frac{N}{m}$$

c.) Amplitude einer erzwungenen Schwingung :

$$A(\eta) = \frac{A_e}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$, wobei $D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{2.23\,\frac{1}{s}}{62.9\,\frac{rad}{s}}$

$$D \approx 0.0355$$

An der Resonanzfrequenz ist $\eta = \frac{f_e}{f_0} = 1$

$$\Rightarrow A(1) = \frac{A_e}{2D} = \frac{0.5\,mm}{2(0.0355)} \approx 7.04\,mm$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

Geg.: $\mu = 7.16 \frac{g}{m}$, $F = 152\ N$, $L = 89.4\ cm$

a.) Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{152\ N}{7.16 \times 10^{-3} \frac{kg}{m}}}$

$$\underline{\underline{c \approx 146\ m/s}}$$

b.) 2. Oberschwingung: $\lambda = \frac{2}{3} L = \frac{2}{3}\ (0.894\ m)$

$$\underline{\underline{\lambda = 0.596\ m}}$$

c.) Mit $c = f\lambda \Rightarrow \underline{\underline{f}} = \frac{c}{\lambda} = \frac{146\ m/s}{0.596\ m} = \underline{\underline{245\ Hz}}$

d.) Stehende Welle:

$$y(x,t) = \underbrace{2 y_m \sin kx}_{y_{max}} \cos \omega t \quad , \text{ wobei } 2y_m = 3\ cm \text{ (aus der Skizze)}$$

Mit $\omega = 2\pi f = (2\pi\ rad)(245\ \frac{1}{s}) \approx 1536\ \frac{rad}{s}$

und $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\ rad}{0.596\ m} \approx 10.54\ \frac{rad}{m}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_{max}(x = 0.1m)}} = (3cm) \underbrace{\sin\left[(10.54\ \frac{rad}{m})(0.1m)\right]}_{0.8694} = \underline{\underline{2.61cm}}$$

e.) Transversalgeschwindigkeit:

$$u(x,t) = \dot{y}(x,t) = -\underbrace{2y_m\ \omega \sin(kx)}_{u_{max}} \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u(x = 0.1m,\ t = 0.3s)}} = -(3cm)\ 2\pi(245\ \tfrac{1}{s}) \sin\left[(10.54\ \tfrac{rad}{s})(0.1m)\right] \times \underbrace{\sin\left[(1536\ \tfrac{rad}{s})(0.3s)\right]}_{0.8490}$$

$$\approx \underline{\underline{34.1\ \frac{m}{s}}}$$