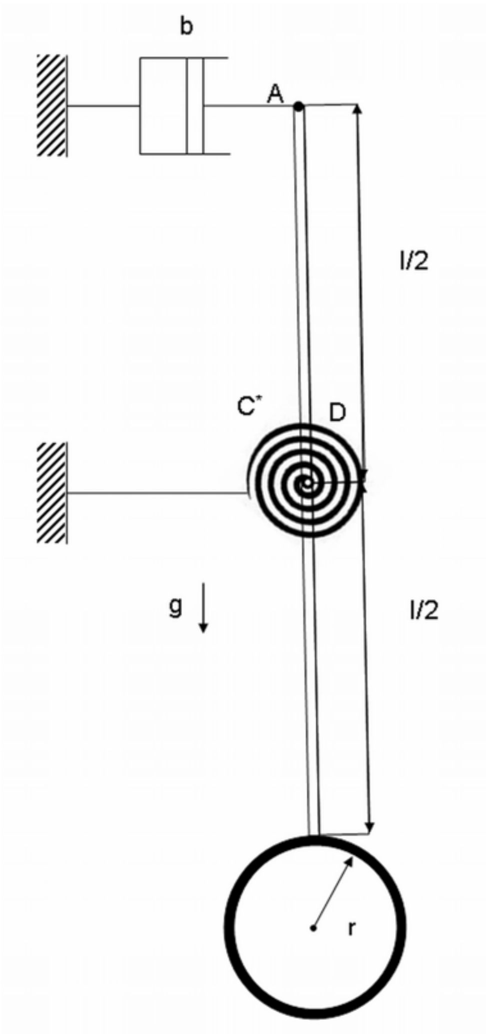
Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Wintersemester	2006/07	Blatt 3 (von 4)
Fakultät:	MB	Semester EKB3, EPB3
Prüfungsfach:	TM2, Technische Physik 3	Fachnummer: 3011
Hilfsmittel:	Manuskript, Literatur, Taschenrechner	*Zeit: 30 Minuten*

Aufgabe 3: Gedämpfte Schwingung **(20 Minuten)**

Das abgebildete, schwingungsfähige System besteht aus einer dünnen Stange mit der Länge l=1,2 m und der Masse m_{St}=2,3 kg. Am unteren Ende der Stange hängt eine massive Kugel mit dem Radius r=50 cm und der Masse m_K=0,4 kg. Die Stange ist in ihrem Mittelpunkt, dem Drehpunkt D reibungsfrei gelagert. In D ist zusätzlich eine Spiralfeder (C*=15,0 Nm) angebracht, die in der senkrechten Lage der Stange kein Drehmoment ausübt.



a) Geben Sie die Differentialgleichung für die gedämpften Schwingungen ß(t) mit der Einschränkung kleiner Winkelamplituden an.

b) Berechnen sie die Schwingungsdauer T_0 für freie, ungedämpfte Schwingungen im Schwerefeld der Erde (g=9,81 m/s^2).

c) Die in Punkt A wirksame, viskose Dämpfung soll nun berücksichtigt werden. Man stellt fest, dass sich die Amplitude der Drehschwingungen nach jeweils 3 Schwingungsdauern auf die Hälfte reduziert. Berechnen Sie den Dämpfungsgrad ϑ, den Abklingkoeffizienten δ und den Koeffizienten **b** der Reibungskraft F_R im Dämpfer A (Hinweis: schwache Dämpfung).

Zusatz :

d) Der Energieinhalt des Pendels soll zum Zeitpunkt t=0 E_a=3 J betragen. Wie lange dauert es, bis im Dämpfer die Reibungswärme E_R=2 J abgegeben wird ?

Weitere Angaben: die Massenträgheitsmomente bezüglich Drehung um den S-Punkt sind

für die Stange: $\mathbf{J_{s,St}} = \dfrac{\mathbf{m \cdot l^2}}{\mathbf{12}}$

und für die Kugel $\mathbf{J_{s,K}} = \dfrac{\mathbf{2m \cdot r^2}}{\mathbf{5}}$

Lösungsvorschlag: Aufgabe 3 *Autor: Prillinger*

a) in der Newtongleichung $\sum \mathbf{M_i} = \mathbf{J_D} \cdot \ddot{\beta}$ für die gedämpften Schwingungen müssen die Rückstellmomente $M_{Rü1}$ (Spiralfeder) und $M_{Rü2}$ (Gravitation) sowie das Reibungsmoment M_R der in A angreifenden geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft $\mathbf{F_R} = -\mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{2}} \cdot \dot{\beta}$ berücksichtigt werden:

$$\mathbf{M_{Rü1}} = -\mathbf{C^*} \cdot \beta \qquad \mathbf{M_{Rü2}} = -\mathbf{m_K} \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{2}} + \mathbf{r}\right) \mathbf{\sin}\beta \qquad \mathbf{M_R} = -\mathbf{b} \cdot \left(\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{2}}\right)^2 \cdot \dot{\beta}$$

Die zu lösende Differentialgleichung ist dann:

$$\ddot{\beta} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{J_D}} \cdot \frac{\mathbf{l^2}}{\mathbf{4}} \cdot \dot{\beta} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{J_D}} \left[\mathbf{C^*} + \mathbf{m_K} \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{2}} + \mathbf{r}\right)\right] \cdot \beta = \mathbf{0}$$

b)Zur Berechnung der Schwingungsdauer T_0 wird das Massenträgheitsmoment J_D und die Ersatzdrehfederkonstante $\mathbf{C^*_{Ers}} = \mathbf{C^*} + \mathbf{m_K} \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{2}} + \mathbf{r}\right)$ benötigt:

$$\mathbf{J_D} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}} \mathbf{m_{St}} \cdot \mathbf{l^2} + \left[\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} \mathbf{r^2} + \left(\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{2}} + \mathbf{r}\right)^2\right] \cdot \mathbf{m_K} = \mathbf{0{,}8\,kg \cdot m^2}\ , \qquad \mathbf{C^*_{Ers}} = \mathbf{19{,}32\,N \cdot m}$$

Für T_0 erhält man dann:

$$\mathbf{T_0} = \mathbf{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{J_D}}{\mathbf{C^*_{Ers}}}} = \mathbf{1{,}28\ s}$$

c)Für die Amplitude der exponentiell gedämpften Schwingung gilt $\beta_m(\mathbf{3} \cdot \mathbf{T}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \beta_0$

aus $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \beta_0 = \beta_0 \cdot \mathbf{exp}(-\delta \cdot \mathbf{3T})$ folgt $\delta = \mathbf{ln(2)} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3T}} = \mathbf{0{,}1807\,s^{-1}}$, ($T_d=T_0=T$)

der Dämpfungsgrad $\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\mathbf{0{,}1807}}{\mathbf{4{,}913}} = \mathbf{0{,}0368}$

und die Kraftkonstante $\mathbf{b} = \delta \cdot 2\mathbf{J_D} \cdot \frac{4}{\mathbf{l}^2} = 0{,}803\ \mathbf{kg \cdot s}^{-1}$

d)Der Energieinhalt der Schwingung nimmt durch die Dämpfung mit dem Quadrat der Amplitude ab: $\mathbf{E_{end}} = \mathbf{E_{anf}} \cdot \mathbf{exp}(-\mathbf{2} \cdot \delta \cdot \mathbf{t_{end}})$. Wenn im Dämpfer die Reibungswärme E_R=2J abgegeben wurden, beträgt die Energie im Pendel noch E_{end}=1J (bei E_{anf}=3J).

Damit ergibt sich für $\mathbf{t_{end}} = \frac{\mathbf{ln3}}{\mathbf{2} \cdot \delta} = \mathbf{3{,}04\ s}$.

Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Wintersemester	2006	Blatt 4 (von 4)
Fakultät:	MB	Semester EKB3, EPB3
Prüfungsfach:	TM2, Technische Physik 3	Fachnummer: 3011
Hilfsmittel:	Manuskript, Literatur, Taschenrechner	*Zeit: 30 Minuten*

Aufgabe 4: Schwingende Luftsäule **(10 Minuten)**

Die Luftsäule in einer Röhre wird zu Schwingungen angeregt. Der Röhrendurchmesser sei klein gegenüber ihrer Länge. Man beobachtet drei aufeinanderfolgende Eigenfrequenzen bei 90, 150 und 210 Hz.

a) Handelt es sich um longitudinale oder transversale Schwingungen ?

b) Ist die Röhre nur an einem Ende oder an beiden Enden offen ?

c) Welchen Wert hat die Grundschwingungsfrequenz ?

c) Skizzieren Sie die Lage der Schwingungsbäuche und –knoten für die drei Frequenzen !

e) Wie lauten die beiden nächsthöheren Eigenfrequenzen oberhalb des Wertes 210 Hz ?

Zusatz :

Der Betrag der temperaturabhängigen Schallgeschwindigkeit c_L in Luft kann mit folgender Beziehung angenähert werden :

$c_L \approx (331{,}5 + 0{,}6\ \vartheta\ [°C]\ )\ m/s$ mit ϑ : Temperatur in „Grad Celsius“

f) Wie lang ist die Röhre, wenn die Temperatur der Luft 20°C beträgt ?

g) Welchen Wert hat die Grundschwingungsfrequenz bei einer Temperatur von 80°C ?

Lösungsvorschlag ***Autor: H Käß***

4) Schwingende Luftsäule

a) Es handelt sich um longitudinale Schwingungen, da sie in einer Gassäule stattfinden

b) Wellenlänge der stehenden Wellen in einer Röhre der Länge L:

beidseits offen
$L = n \cdot \lambda_n / 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = 2 \cdot L/n \quad \Rightarrow \quad f_n = c/\lambda_n = n \cdot c/(2 \cdot L) = \mathbf{n \cdot f_0}$

einseitig offen
$L = (2n+1) \cdot \lambda_n / 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = 4 \cdot L/(2n+1) \quad \Rightarrow \quad f_n = c/\lambda_n = (2n+1) \cdot c/(4 \cdot L) = \mathbf{(2n+1) \cdot f_0}$

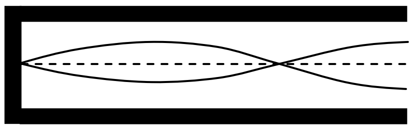
Wäre die Röhre beidseits offen, müssten die Frequenzen sein $1 \cdot f_0, 2 \cdot f_0, 3 \cdot f_0, 4 \cdot f_0, ...$
Der Frequenzabstand zwischen benachbarten Eigenfrequenzen wäre $\Delta f = f_0$

Bei einer einseitig offenen Röhre ist die Folge dagegen $1 \cdot f_0, 3 \cdot f_0, 5 \cdot f_0, 7 \cdot f_0, ...$
Der Frequenzabstand zwischen benachbarten Eigenfrequenzen wäre $\Delta f = 2 \cdot f_0$

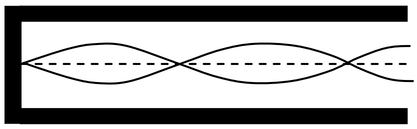
Die gegebenen Frequenzwerte von 90, 150 und 210 Hz passen nur zum zweiten Fall. Offenbar handelt es sich hier also um eine **einseitig offene Röhre**.

c) Die Grundschwingungsfrequenz ist **$f_0 = 30$ Hz**

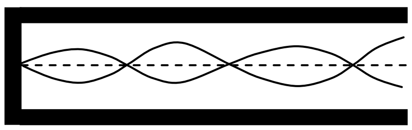
d) Skizze ...



$f_1 = 3 \cdot f_0 = 90$ Hz



$f_2 = 5 \cdot f_0 = 150$ Hz



$f_3 = 7 \cdot f_0 = 210$ Hz

e) Nächsthöhere Frequenzen sind $f_4 = 9 \cdot f_0$ = **270 Hz**
$f_5 = 11 \cdot f_0$ = **330 Hz**

Zusatz :

f) Es gilt $f_0 = c/(4 \cdot L)$ daraus folgt $L = c/(4 \cdot f_0)$

Die Schallgeschwindigkeit bei 20°C ist $c_L(20°C) = (331{,}5 + 20 \cdot 0{,}6)$ m/s = 343,5 m/s
Demnach $L = 343{,}5$ m $/(4 \cdot 30) =$ **2,86 m**

g) Die Schallgeschwindigkeit bei 80°C ist $c_L(80°C) = (331{,}5 + 80 \cdot 0{,}6)$ m/s = 379,5 m/s
Demnach $f_0 = c/(4 \cdot L) = 379{,}5$ Hz $/(4 \cdot 2{,}86) =$ **33,17 Hz**