FACHHOCHSCHULE ESSLINGEN - HOCHSCHULE FÜR TECHNIK

Sommersemester	2006	Blatt 1 (von 5)
Studiengang:	FZB (A)	Semester 1
Prüfungsfach:	Naturwissenschaftliche Grundlagen	Fachnummer: 1091
Hilfsmittel:	Manuskript, Literatur, Taschenrechner	Zeit: 90 Minuten

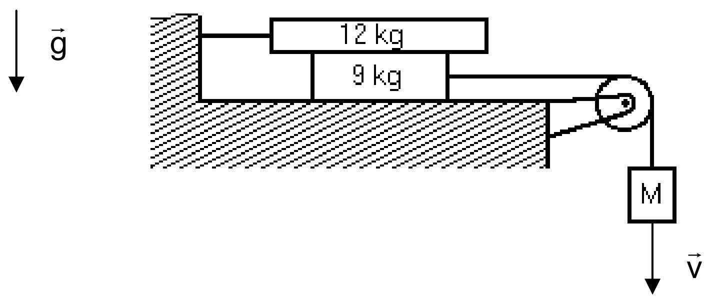
Gesamtpunktzahl: 60

<u>Aufgabe 1:</u> (30 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus fünf unabhängig voneinander lösbaren Teilaufgaben a) – e)

a) Reibung

Im Bild ist ein System zu sehen, das aus drei Körpern (12 kg, 9 kg und M) besteht. Der Körper mit der Masse m = 9 kg liegt reibungsfrei auf einer Unterlage. Die Umlenkrolle soll sich ebenfalls reibungsfrei drehen können. Allerdings gibt es eine Reibkraft zwischen dem 9 kg und dem 12 kg schweren Körper mit einem Reibungskoeffizienten von μ = 0.3.

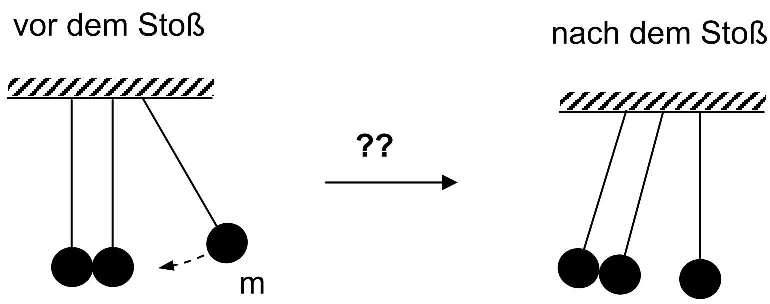


Momentaufnahme zum Zeitpunkt t

Wie groß ist die Masse M zu wählen, damit die Sinkgeschwindigkeit v konstant ist?

b) Stoß

Das nachstehende Bild soll einen zentralen, <u>elastischen</u> Stoß in einer Pendelreihe (im Schwerefeld der Erde) mit drei gleichen Massen m darstellen.



Zeigen Sie mit Hilfe des Energie- und Impulserhaltungssatzes, dass der in der rechten Bildhälfte skizzierte Zustand in Wirklichkeit nicht eintreten kann.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1 ***Autor H Käß (Aufgabe T Hanak)***

a) Reibung

Konstante Sinkgeschwindigkeit bedeutet, daß keine resultierende Kraft auf die Masse M wirkt. Hier bedeutet dies, dass sich die Reibungskraft F_R zwischen den beiden Massen zu 9 und 12 kg und die Gewichtskraft F_G der Masse M das Gleichgewicht halten.

$F_R = \mu\ F_N = \mu\ m\ g = 0.3\ 12\ \text{kg}\ 9.81\ \text{m/s}^2 = 35.3\ \text{N}$

$F_R = F_G = M\ g$ und damit $M = F_R / g =$ **3.6 kg**

(4 Punkte)

b) Stoß

Es wird angenommen, dass die Kugel der Masse m in einer Höhe h über dem tiefsten Punkt ihrer Bahn losgelassen wird. Dann folgt für Energie E_{vor} und Impuls p_{vor} dieser Kugel vor dem Stoßvorgang (mit der Geschwindigkeit v_{vor} vor dem Stoß)

$E_{vor} = m\ g\ h = ½\ m\ v_{vor}^2$ und daraus $v_{vor} = \sqrt{2\ g\ h}$

$p_{vor} = m\ v_{vor} = m \sqrt{2\ g\ h}$

Für einen elastischen Stoß gelten sowohl Energie- als auch Impulserhaltung. Wenn der in der rechten Bildhälfte gezeichnete Zustand einträte, bedeutete dies also

IES $p_{vor} = m\ v_{vor} = 2\ m\ u_{nach} = p_{nach}$ und daraus $u_{nach} = \sqrt{g\ h / 2}$

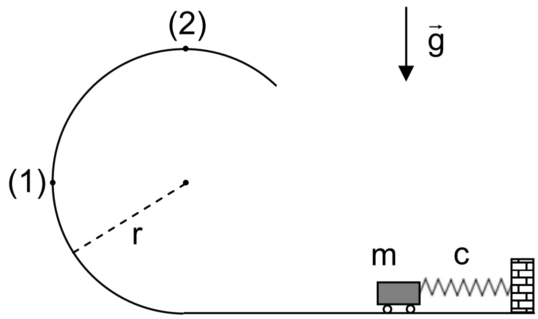
EES $E_{vor} = m\ g\ h = ½\ (2\ m)\ u_{nach}^2$ und daraus $u_{nach} = \sqrt{g\ h}$

Offenbar ergibt sich ein Widerspruch ! Damit tritt der rechts gezeigte Zustand nicht ein.

(4 Punkte)

c) Looping

Der Wagen mit der Masse $m = 23$ g liegt direkt vor einer gespannten Feder mit der Federkonstante $c = 13$ N/m. Der Wagen wird nun aus der Ruhe beschleunigt und rollt reibungsfrei in die halbkreisförmige Führungsschiene mit Radius $r = 12$ cm ein (s. Skizze).



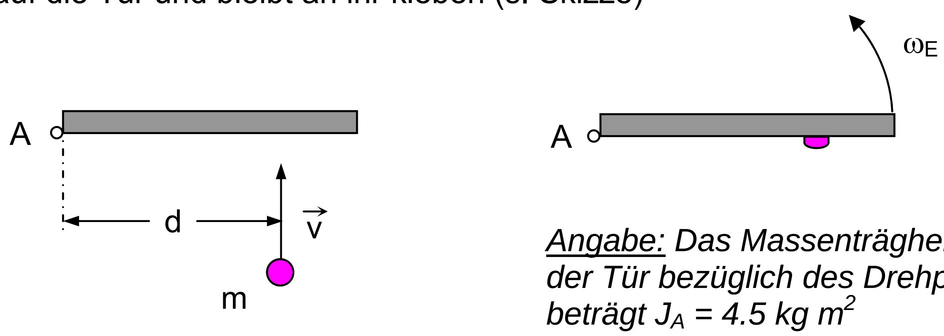
<u>Annahme</u>: Vernachlässigen Sie die räumliche Ausdehnung des Wagens.

a) Um welche Strecke muss die Feder mindestens zusammengedrückt werden, damit der Wagen Punkt (2) erreicht, ohne den Kontakt zur Bahn zu verlieren?

b) Skizzieren Sie <u>qualitativ</u> die Kräfte (einschließlich der resultierenden Kraft) auf den Wagen im Punkt (1).

d) Türe

Eine Tür ist im Punkt A reibungsfrei drehbar gelagert. Ein Ball aus Knetmasse der Masse $m = 0.4$ kg und der Geschwindigkeit $v = 25$ m/s trifft im Abstand $d = 60$ cm von der Drehachse auf die Tür und bleibt an ihr kleben (s. Skizze)



<u>Angabe:</u> Das Massenträgheitsmoment der Tür bezüglich des Drehpunkts A beträgt $J_A = 4.5$ kg m^2

a) Mit welcher gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit ω_E bewegen sich Tür und Knetmasse nach dem Stoß weiter?

b) Bleibt bei diesem Stoß die mechanische Energie erhalten? Begründen Sie <u>ohne</u> Rechnung!

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1 ***Autor H Käß (Aufgabe T Hanak)***

c) Looping

a) Die Feder werde um die Länge x aus der entspannten Lage zusammengedrückt, die Geschwindigkeit des Wagens in Punkt (2) betrage v_o

Energieerhaltungssatz $\frac{1}{2} c\, x^2 = \frac{1}{2} m\, v_o^2 + m\, g\, h$

$$= \frac{1}{2} m\, v_o^2 + m\, g\, 2\, r$$

Grenzbedingung für Kontakt zur Bahn in Punkts (2): Zentripetalkraft = Gewichtskraft

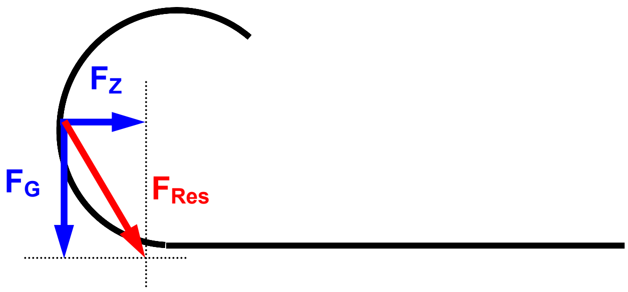
$F_Z = F_G$ daraus $m\, v_o^2 / r = m\, g$

also $v_o^2 = g\, r$

eingesetzt $\frac{1}{2} c\, x^2 = 5\, m\, g\, r / 2$

$$x = \sqrt{5\, m\, g\, r / c} \qquad \mathbf{= 0{,}102\ m}$$

b)



(7 Punkte)

d) Türe

a) Drehimpulserhaltungssatz für diesen Drehstoß, Drehimpuls jeweils bezüglich Punkt A

Drehimpuls Ball $L_{vor} = m\, v\, d = L_{nach} = J_A\, \omega_E + m\, d^2\, \omega_E$ Drehimpuls Tür + Ball

$$= (J_A + m\, d^2)\, \omega_E$$

Daraus $\omega_E = m\, v\, d / (J_A + m\, d^2)$

$$= 0.4\ kg\ 25\ 0.6\ m^2 / (4.5\ kg\ m^2 + 0.4\ kg\ 0.36\ m^2)$$

s

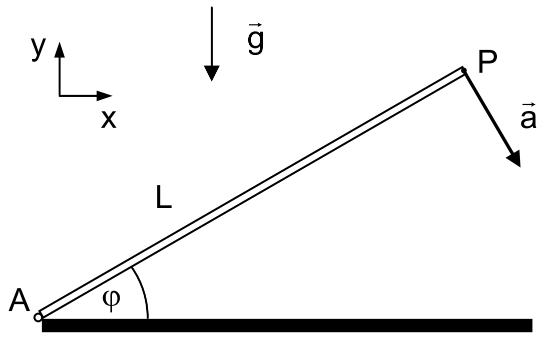
$$\mathbf{= 1{,}29\ rad / s}$$

<u>b) Begründung:</u> Unelastischer Stoßvorgang zwischen Ball und Türe, die Knetmasse wird deformiert wodurch mechanische Energie in Wärme verwandelt wird

(5 Punkte)

e) Drehbewegung

Ein dünner langer Stab der Länge L sei im Punkt A reibungsfrei drehbar gelagert und wird im Schwerefeld der Erde aus der Ruhe losgelassen (s. Skizze).



Angaben:

$$J_A = \frac{1}{3} m L^2$$

a) Welche Gleichung (als Funktion von L und φ) beschreibt das Drehmoment M des Stabes bezüglich des Punktes A?

b) Welchen <u>Betrag</u> hat die Tangentialbeschleunigung $\vec{a}$ des Punktes P am Stabende, wenn der Anfangswinkel beim Loslassen φ_0 = 25° beträgt?

c) Wie groß darf der Anfangswinkel φ_0 maximal sein, damit die y-Komponente der Beschleunigung des Punktes P beim Loslassen des Stabs größer oder gleich der Gravitationsbeschleunigung ist?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1 ***Autor H Käß (Aufgabe T Hanak)***

e) Drehbewegung

Drehmoment M = Kraft F_G x Hebelarm $r_\perp$, die Kraft ist hierbei die Gewichtskraft, sie greift im Schwerpunkt des Stabes an, der sich in der Stabmitte befindet.

a) $\mathbf{M = F_G\, r_\perp = m\, g\, ½\, L \cos \varphi}$

b) Die Tangentialbeschleunigung a_{tan} folgt aus der Winkelbeschleunigung α nach

$a_{tan} = L\,\alpha$ wobei $\alpha = M / J_A = 3\, m\, g\, L \cos \varphi / (2\, m\, L^2)$

$a_{tan} = L\,\alpha = L\, 3\, g \cos \varphi_0 / (2\, L) = 3\, g \cos \varphi_0 / 2 =$ $\mathbf{13{,}34\ m/s^2}$

c) Die y-Komponente a_y der Beschleunigung berechnet sich zu $a_y = a_{tan} \cos \varphi_0$

Grenzbedingung für $\varphi_0 = \varphi_{max}$ $a_y = g$

Also $a_y = a_{tan} \cos \varphi_{max} = 3\, g \cos^2 \varphi_{max} / 2 = g$

$\cos^2 \varphi_{max} = 2/3$

$\mathbf{\varphi_{max} = 35{,}26°}$

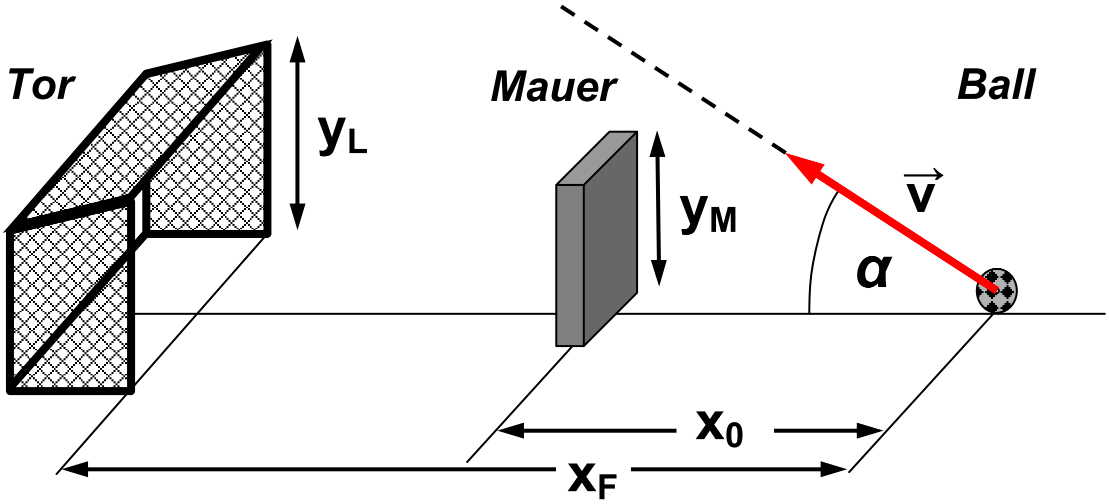
(10 Punkte)

FACHHOCHSCHULE ESSLINGEN - HOCHSCHULE FÜR TECHNIK

Sommersemester 2006		Blatt 4 (von 5)
Studiengang:	FZB (A)	Semester 1
Prüfungsfach:	Naturwissenschaftliche Grundlagen	Fachnummer: 1091

Aufgabe 2: **Freistoß** **(15 Punkte)**

Nach einem Foul im Abstand $x_F = 18{,}3$ m mitten vor dem angegriffenen Tor entscheidet der Schiedsrichter auf direkten Freistoß. Die Verteidiger bilden eine „Mauer“ im erlaubten Abstand $x_0 = 9{,}15$ m. Der den Freistoß ausführende Spieler möchte über die Mauer hinweg in das Tor treffen und schießt den Ball mit der Anfangsgeschwindigkeit v unter dem Winkel α gegen die Horizontale los.



Hinweis: Der Ball sei ein <u>Punkt</u> der Masse m_F = 430 g, die Bewegung erfolge reibungsfrei.

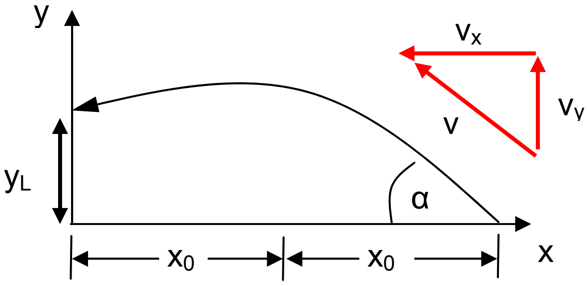
a) Die Toröffnung weist eine Höhe von $y_L = 2{,}44$ m auf. Wie groß ist für α = 25° die maximale Anfangsgeschwindigkeit, um gerade noch in das Tor zu treffen ?

b) In welcher Höhe fliegt der Ball über die Mauer, wenn diese $y_M = 2{,}0$ m hoch ist ?

c) Die Kontaktzeit des Balls mit dem Fuß des Spielers beträgt Δt = 10 ms. Welche mittlere Kraft zwischen Fuß und Ball ist für den Torschuß aus Teilaufgabe a) erforderlich ?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 ***Autor H Käß***

a)



Zerlegung in zwei Komponenten

$v_y = v \sin \alpha$
$v_x = v \cos \alpha$

Die Flugdauer betrage t_F
Die Anfangsgeschwindigkeit ist v

Es folgen zwei Beziehungen für die Komponenten der Bewegung in x- und y-Richtung :

(1) x - Richtung gleichförmige Bewegung $s_x(t) = v_x\, t \quad = t\, v \cos \alpha$
(2) y - Richtung beschleunigte Bewegung $s_y(t) = v_y\, t - ½\, g\, t^2 \quad = t\, v \sin \alpha - ½\, g\, t^2$

Zur Zeit $t = t_F$ gilt dann $s_x(t_F) = x_F \quad = 2\, x_0$
$s_y(t_F) = y_L$

Aus (1) ergibt sich $t_F = 2\, x_0 / v \cos \alpha$
Mit (2) folgt $y_L = t_F\, v \sin \alpha - ½\, g\, t_F^2 = 2\, x_0 \tan \alpha - ½\, g\, 4\, x_0^2 / (\, v^2 \cos^2 \alpha\,)$

und damit $2{,}44\ m = 18{,}3\ m \tan 25° - 2\ 9{,}15^2\ m^2\ 9{,}81\ m / (\, v^2 \cos^2 25°\ s^2\,)$

$v^2 = 328{,}19\ m^2 / s^2$

v = 18,116 m/s *(= 65,22 km/h)*

(9 Punkte)

b) Flugzeit t_M für Strecke x_0 aus (1) $s_x(t_M) = x_0 = t_M\, v \cos \alpha$

damit $t_M = x_0 / (\, v \cos \alpha) = t_F / 2$
$= 9{,}15\ m / (18{,}116\ m/s \cos 25°) = 0{,}5573\ s$

Höhe bei Erreichen der Mauer aus (2) $s_y(t_M) = t_M\, v \sin \alpha - ½\, g\, t_M^2$
$= 0{,}557\ s\ 18{,}1\ m/s \sin 25° - ½\ 9{,}81\ m/s^2\ 0{,}311\ s^2$
$= 2{,}74\ m$

Damit fliegt der Ball in der Höhe über die Mauer $h = s_y(t_M) – y_m = 2{,}74\ m – 2{,}0\ m =$ **0,74 m**

Hinweis: Die Mauer steht <u>nicht</u> unter dem Scheitelpunkt der Bahn, das Problem ist nicht symmetrisch. Daher sind die Standardformeln der Formelsammlungen nicht anwendbar !!!

(4 Punkte)

c) Die mittlere Kraft F_m hängt über den Kraftstoß mit der Impulsänderung Δp des Balls zusammen $\Delta p = F_m\, \Delta t$

Da der Ball aus der Ruhe startet, gilt $\Delta p = m_F\, v$

und daher $F_m = \Delta p / \Delta t$
$= m_F\, v / \Delta t = 0{,}43\ kg\ 18{,}12\ m / (0{,}01\ s^2)$
= 779,16 N

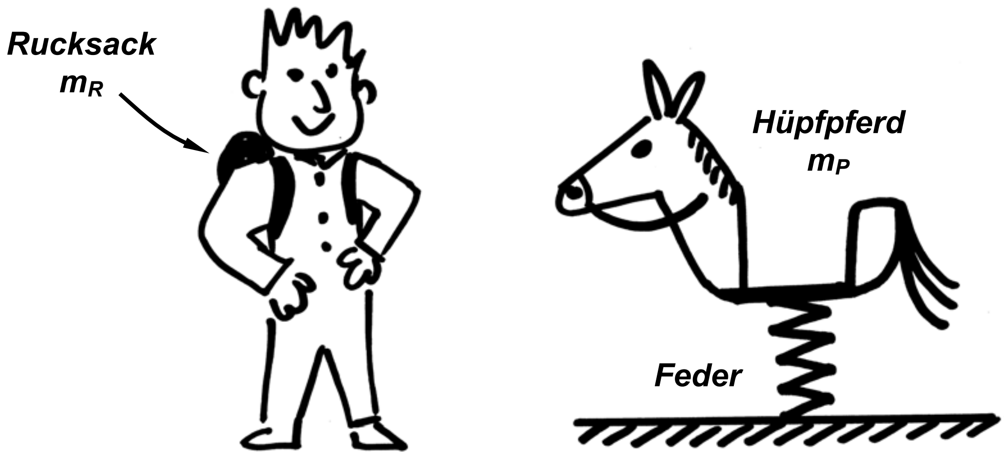
(2 Punkte)

FACHHOCHSCHULE ESSLINGEN - HOCHSCHULE FÜR TECHNIK

Sommersemester 2006	Blatt 5 (von 5)
Studiengang: FZB (A)	Semester 1
Prüfungsfach: Naturwissenschaftliche Grundlagen	Fachnummer: 1091

<u>Aufgabe 3:</u> **Hüpfpferd** **(15 Punkte)**

Ein Kind der Masse $m_K = 25$ kg trägt einen Rucksack der Masse $m_R = 5$ kg. Es sieht auf einem Spielplatz ein auf einer senkrechten Feder angebrachtes Hüpfpferd und sitzt auf. Das Pferd mit dem nun ruhig sitzenden Kind schwingt vertikal mit der Frequenz $f_1 = 1{,}0$ Hz Nach kurzer Zeit nimmt das Kind den Rucksack ab und wirft ihn auf den Boden. Daraufhin erhöht sich die Schwingungsfrequenz auf $f_2 = 1{,}07$ Hz.



<u>Hinweise</u>: Die Feder sei masselos. Die Teile c) –e) sind unabhängig von a), b) lösbar !

a) Berechnen Sie die Federkonstante c der Anordnung.

b) Berechnen Sie die Masse m_P des Pferdes.

Nach einiger Zeit stößt sich das Kind einmal vom Boden ab. Die Schwingungsamplitude der Anordnung mit dem ohne Rucksack wieder ruhig sitzenden Kind nimmt danach innerhalb von 4 Perioden exponentiell auf 1/3 des Anfangwertes ab.

c) Berechnen Sie Abklingkonstante δ und Dämpfungsgrad D der gedämpften Schwingung.

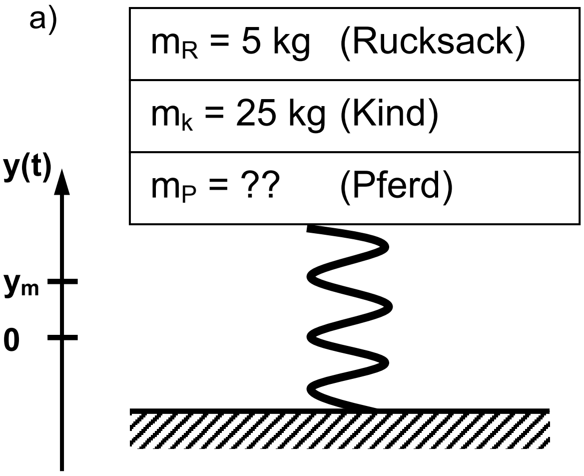
Das Kind beginnt sich nun rhythmisch im Sattel auf und ab zu bewegen, wodurch die Anordnung mit einer effektiven Erregeramplitude von 1,0 cm periodisch angeregt wird.

d) Berechnen Sie die zur Erzielung maximaler Amplitude erforderliche Erregungsfrequenz.

e) Berechnen Sie die maximal erreichbare Amplitude.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3 ***Autor H Käß***

a)



Kreisfrequenz mit Rucksack
$\omega_1^2 = 4\,\pi^2 f_1^2 = c\,/\,(m_R + m_K + m_P)$

Kreisfrequenz ohne Rucksack
$\omega_2^2 = 4\,\pi^2 f_2^2 = c\,/\,(m_K + m_P)$

daraus folgt

(1) $m_R + m_K + m_P = c\,/\,(4\,\pi^2 f_1^2)$

(2) $m_K + m_P = c\,/\,(4\,\pi^2 f_2^2)$

also $m_R = (1\,/\,f_1^2 - 1\,/\,f_2^2)\; c\,/\,(4\,\pi^2)$

daher $c = 4\,\pi^2 m_R\,/\,(1\,/\,f_1^2 - 1\,/\,f_2^2)$
$= 4\,\pi^2\, 5\text{ kg}\,/\,(1/1^2 - 1/1{,}07^2)\text{s}^2$
$= 1559{,}66$ N/m = **1560 N/m**

(5 Punkte)

b) Masse des Pferdes aus (2) $m_P = c\,/\,(4\,\pi^2 f_2^2) - m_K$
$= 1560\text{ N s}^2\,/\,(4\,\pi^2\, 1{,}07^2\text{ m}) - 25\text{ kg}$ **= 9,507 kg**

(2 Punkte)

c) Amplitudenabnahme einer gedämpften Schwingung $x_m(t) = x_m(0)\, e^{-\delta t}$

Die Schwingungsdauer beträgt hier $T_2 = 1/f_2 = 0{,}9346$ s

Also $x_m(4\,T_2) = x_m(0)\, e^{-\delta\, 4\, T2} = x_m(0)\,/\,3$
daraus $-\delta\; 4\; T_2 = \ln(1/3) = -\ln 3$
und somit $\delta = \ln 3\,/\,(4\,T_2) =$ **0,2939 1/s**

Schwingungsfrequenz ω_0 des gleichen Systems ohne Dämpfung : $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$\omega_0^2 = \omega_2^2 + \delta^2 = 4\,\pi^2 f_2^2 + \delta^2 = 45{,}285\ 1/\text{s}^2$
$\omega_0 = 6{,}729$ rad/s

Dämpfungsgrad D $D = \delta\,/\,\omega_0 =$ **0,0437**

(3 Punkte)

d) Resonanzfrequenz $\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\,D^2}$
$= 6{,}729\text{ rad / s}\,\sqrt{1 - 2\; 0{,}0437^2} = 6{,}7166$ rad / s

$f_{res} = \omega_{res}\,/\,(2\,\pi) =$ **1,06898 Hz**

(3 Punkte)

e) Resonanzamplitude $x_{res}\,/\,x_{stat} = 1\,/\,(2D)$

also $x_{res} = x_{stat}\,/\,(2D) = 1\text{ cm}\,/\,(2\; 0{,}0437)$ **= 11,45 cm** = 0,114 m

(2 Punkte)