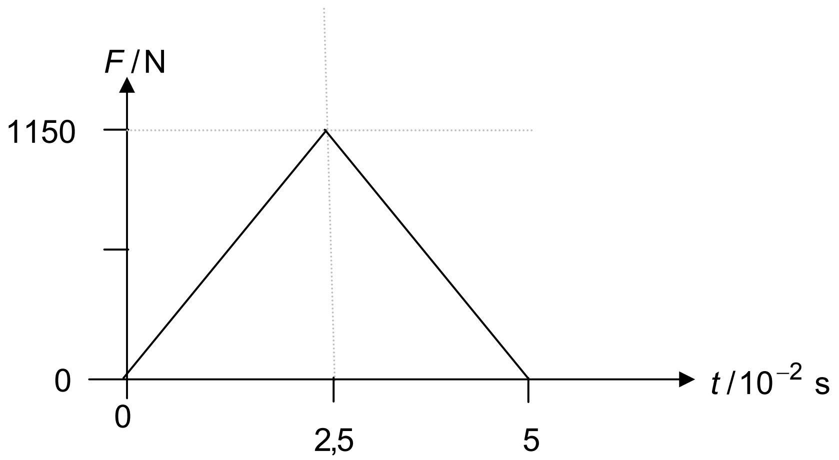
Aufgabe 1 (6 Punkte)

Bei einem Strafstoß wird auf den Fußball ($m = 1{,}5\ \text{kg}$) durch den Stoß des Fußes eine zeitabhängige Kraft F(t) ausgeübt (vgl. Skizze).



Wie groß ist die Geschwindigkeit v_F des Fußballs direkt nach dem Stoß?

Lösung zu Aufgabe 1

Der Kraftstoß bewirkt eine Impulsänderung.

Der Kraftstoß $\int F(t)\,\mathrm{d}t$ ist gleich der Fläche unter der F(t)-Kurve im F,t -Diagramm.

Da der Ball vor dem Stoß ruht, ist die Impulsänderung $\int \mathrm{d}p = m\int \mathrm{d}v = m(v_F - 0) = mv_F$

Nach Newton gilt also

$$\int F(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}p$$

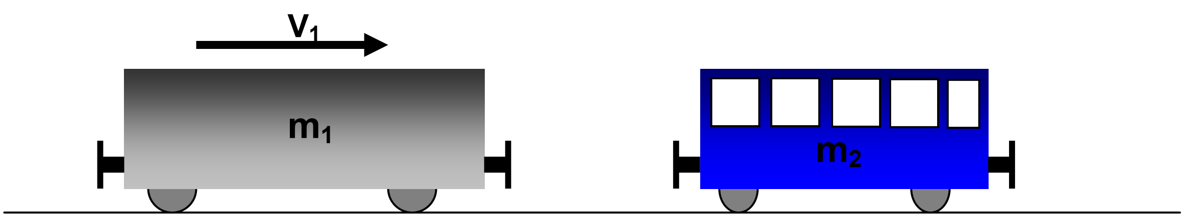
$$\frac{1150\ \text{N}}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\ \text{s} = 1{,}5\ \text{kg} \cdot v_F$$

$$v_F = 19{,}2\ \text{m}\,\text{s}^{-1} = 69\ \text{km}\,\text{h}^{-1}.$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Ein Güterwagen der Masse $m_1 = 25000\ \text{kg}$ fährt gegen einen stehenden Personenwagen und kuppelt an diesen an. Bei diesem Manöver werden 30 % der kinetischen Energie des Güterwagens in nicht-mechanische Energieformen umgewandelt.

Wie groß ist die Masse m_2 des Personenwagens?



Lösung zu Aufgabe 2

Mit dem Impulserhaltungssatz folgt

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u$$

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Energie vor dem Stoß

$$E_{kin}^{vor} = \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2$$

Energie nach dem Stoß

$$E_{kin}^{nach} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$$

Wenn 30 % der Energie verloren gehen, dann sind noch 70 % vorhanden.

Bedingung:

$$E_{kin}^{nach} = 0{,}7 \cdot E_{kin}^{vor}$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = 0{,}7 \cdot \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2$$

Geschwindigkeit u aus der Impulsbedingung eingesetzt

$$\frac{1}{2}(\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)(\frac{\mathrm{m}_1}{\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2} \mathrm{v}_1)^2 = 0{,}7 \cdot \frac{1}{2} \mathrm{m}_1 {\mathrm{v}_1}^2$$

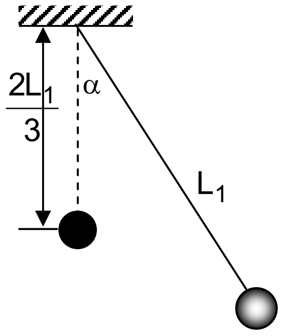
$$\frac{\mathrm{m}_1}{\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2} = 0{,}7$$

$$\mathrm{m}_1 = 0{,}7\mathrm{m}_1 + 0{,}7\mathrm{m}_2$$

$$\mathrm{m}_2 = \frac{0{,}3}{0{,}7} \mathrm{m}_1 = 10714 \text{ kg}$$

Aufgabe 3 (34 min)

Eine als punktförmige Masse zu betrachtende Kugel ($m_1 = 2\,\text{kg}$) hängt an einem masselosen nicht dehnbarem Faden der Länge $L_1 = 1\,\text{m}$ (vgl. Skizze).



(a) Das Pendel der Fadenlänge L_1 schwingt zunächst mit kleinen Auslenkungen. Wie groß ist seine Schwingungsdauer T_1? 3 Punkte

(b) Wie groß ist die Schwingungsdauer, wenn die Masse der Kugel verdoppelt wird? 1 Punkt

Die Kugel wird nun in einem zweiten Experiment um einen Winkel $\alpha = 30^{\circ}$ nach rechts ausgelenkt und aus der Ruhe heraus losgelassen.

(c) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω_1 der Kugel beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage? 6 Punkte

(d) Genau beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage wird die Fadenlänge auf $L_2 = \frac{2}{3} L_1$ verkürzt. Bis zu welcher Höhe h_2 schlägt das Pendel danach aus? 14 Punkte

(e) Durch Reibungseinflüsse nimmt die Auslenkung exponentiell ab. Der Dämpfungsgrad sei gegeben durch $D = 0{,}05$ (schwache Dämpfung). Wie viele Schwingungen N macht das Pendel, bis sein Ausschlag auf mindestens die Hälfte des Anfangsausschlages abgenommen hat? 10 Punkte

Hinweis: Rechnen Sie mit $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

Lösung zu Aufgabe 3

(a) Für die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels gilt:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} = 2{,}00\ \text{s}$$

(b) Die Schwingungsdauer ist von der Masse unabhängig, also bleibt sie bei Verdoppelung der Masse gleich.

(c) Der Energieerhaltungssatz liefert mit $h_1 = L_1(1-\cos\alpha)$

$$mgL_1(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}J_1\omega_1^{\,2} \qquad \text{für eine punktförmige Masse folgt } J_1 = mL_1^{\,2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2mgL_1(1-\cos\alpha)}{J_1}} = \sqrt{\frac{2mgL_1(1-\cos\alpha)}{mL_1^{\,2}}} = \sqrt{\frac{2g(1-\cos\alpha)}{L_1}} = 1{,}62\ \text{s}^{-1}$$

(d) Da beim Verkürzen der Fadenlänge keine äußeren Momente wirken, folgt mit dem DIES

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \ \text{ für die punktförmiger Masse ist } J_2 = m(L_2)^2 = m\left(\frac{2L_1}{3}\right)^2 = m\frac{4L_1^{\,2}}{9}$$

$$\omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\omega_1 = \frac{mL_1^{\,2}}{m\frac{4L_1^{\,2}}{9}}\omega_1 = \frac{9}{4}\omega_1 = 3{,}65\ \text{s}^{-1}$$

Nach der Verkürzung des Pendels folgt wiederum mit dem EES

$$\frac{1}{2}J_2\omega_2^{\,2} = mgh_2$$

$2(1-\cos\alpha) = (1-\cos\beta)$

$$h_2 = \frac{\frac{1}{2}J_2\omega_2^{\,2}}{mg} = \frac{\frac{1}{2}mL_2^2\,\omega_2^{\,2}}{mg} = \frac{\frac{1}{2}m\left(\frac{2L_1}{3}\right)^2\omega_2^{\,2}}{mg} = \frac{\frac{2}{9}L_1^2\,\omega_2^{\,2}}{g} = 0{,}302\ \text{m}.$$

(e) Die Schwingungsdauer des gedämpften Pendels ist

$$T_d = 2{,}00....\ \text{s} \approx T_0$$

Die Abnahme der Auslenkung erfolgt exponentiell, also gilt

$$\frac{\alpha(t+NT_d)}{\alpha(t)} = e^{-N\delta T_D} = \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{D}{\omega_0} = \frac{DT_0}{2\pi} \ \text{ und } T_d \approx T_0 \text{ folgt}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-N2\pi D}$$

$$\ln 2 = N2\pi D \Rightarrow N = \frac{\ln 2}{2\pi D} = 2{,}2$$

Also nach 3 Schwingungen.

(g) Für die Schwingungsdauer eines Feder-Masse-Systems gilt

$$T_{\text{Feder}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

Es soll gelten:

$$T_{\text{Feder}} = 2T$$

somit

$$2T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

$$\frac{T^2}{\pi^2} = \frac{m}{c}$$

$$\Rightarrow c = \pi^2 \frac{m}{T^2} = 4{,}9\,\text{Nm}^{-1}$$