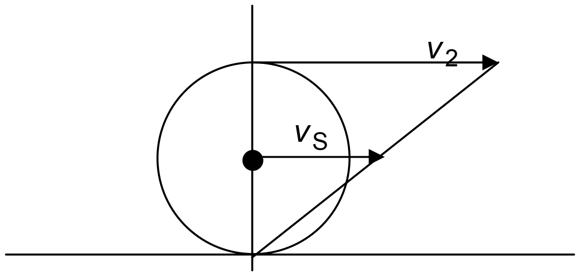
Lösung zu Aufgabe 1:

a) Kinematischer Zusammenhang der Größen der Translation und der Rotation
Bei Rollen ohne zu gleiten ist die Geschwindigkeit am Berührpunkt von Walze und Unterlage Null



Es gilt:

$v_2 = 2r\omega$

$v_S = r\omega$

Hieraus ist leicht zu sehen

$v_2 = 2v_S$

Analog gilt für die Beschleunigungen

$a_2 = 2r\alpha$

$a_S = r\alpha$

Also

$a_2 = 2a_S$

b) Der Energieerhaltungssatz liefert für die beiden Körper:

$$m_2 gy = \frac{1}{2}m_2 {v_2}^2 + \frac{1}{2}m_1 {v_S}^2 + \frac{1}{2}J_S \omega^2$$

Das Massenträgheitsmoment einer Walze ist $J_S = \frac{1}{2}m_1 r^2$

Im Energieerhaltungssatz werden nun alle kinematischen Größen durch v_2 ausgedrückt

$$m_2 gy = \frac{1}{2}m_2 {v_2}^2 + \frac{1}{2}m_1 (\frac{v_2}{2})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_1 r^2 (\frac{v_2}{2r})^2$$

$$m_2 gy = \frac{1}{2}m_2 {v_2}^2 + \frac{1}{8}m_1 {v_2}^2 + \frac{1}{16}m_1 {v_2}^2$$

$$m_2 gy = (\frac{3}{16}m_1 + \frac{1}{2}m_2){v_2}^2$$

Division durch die Masse m_2

$$gy = (\frac{3}{16}\frac{m_1}{m_2} + \frac{1}{2}){v_2}^2$$

Das Massenverhältnis ist laut Aufgabenstellung $\frac{m_1}{m_2} = 8$

$gy = 2{v_2}^2$

und damit

$$v_2(y) = \sqrt{\frac{gy}{2}} = \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot \sqrt{y} = 2{,}22\ \mathrm{m}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \sqrt{y}$$

Hieraus gilt für v_S

$$v_S(y) = \frac{1}{2} v_2(y) = \sqrt{\frac{gy}{8}} = \sqrt{\frac{g}{8}} \cdot \sqrt{y} = 1{,}11\,\mathrm{m}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \sqrt{y}$$

Und für ω folgt

$$\omega(y) = \frac{1}{2r} v_2(y) = \sqrt{\frac{gy}{8r^2}} = \sqrt{\frac{g}{8r^2}} \cdot \sqrt{y} = 11{,}1\,\mathrm{m}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \sqrt{y}$$

Da es sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung handelt gilt (aus der Kinematik bekannt)

$$a_2 = \frac{{v_2}^2}{2y} = \frac{g}{4} = 2{,}45\,\mathrm{m\,s}^{-2}$$

$$a_S = \frac{a_2}{2} = 1{,}23\,\mathrm{m\,s}^{-2}$$

Für die Winkelbeschleunigung folgt

$$\alpha = \frac{a_2}{2r} = \frac{g}{8r} = 12{,}3\ \mathrm{s}^{-2}$$

Lösung zu Aufgabe 2:

(a) Für ein lineares Momentengesetz gilt – mit der Drehfederkonstante k^* als Proportionalitätskonstante – für den Zusammenhang zwischen äußerem Drehmoment M_{ext} und Winkelauslenkung β

$$M_{\text{ext}} = k^* \beta$$

(analog zum HOOKEschen Gesetz für eine ideale Feder $F_{\text{ext}} = cy$)

daraus wird (der Drehwinkel ist im Bogenmaß einzusetzen)

$$k^* = \frac{M_{\text{ext}}}{\beta} = \frac{20\ \text{Nm}}{\frac{\pi}{6}} = 38{,}20\ \text{Nm}$$

(b) Die Schwingungsdauer eines Drehpendels bestimmt sich aus Massenträgheitsmoment J und Drehfederkonstante k^* gemäß

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\text{P}}}{k^*}} \qquad \text{(analog zum Federpendel } T_0^{\text{Federpendel}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}\text{)}$$

daraus erhält man für das Massenträgheitsmoment

$$J_{\text{P}} = \frac{k^* T_1^2}{4\pi^2} = \frac{38{,}20\ (\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-2})\,\text{m}\cdot(0{,}65\ \text{s})^2}{4\pi^2}$$

$$= 0{,}4088\ \text{kg}\,\text{m}^2$$

(c) Die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels unter der Einschränkung 'kleine Auslenkungen' (nach Linearisierung der Differentialgleichung) ist gegeben durch

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\text{P}}}{m\,g\,d}}$$

mit

m	Gesamtmasse
g	Schwerebeschleunigung
d	Abstand zwischen Drehpunkt P und Massenmittelpunkt S
J_{P}	Massenträgheitsmoment bezüglich des Drehpunkts P

Quadrieren und Auflösen nach dem Abstand Drehpunkt-Massenmittelpunkt $d = \overline{\text{PS}}$ liefert

$$d = \frac{4\pi^2 J_{\text{P}}}{m\,g\,T_2^{\,2}} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}4088\ \text{kg}\,\text{m}^2}{10\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m}\,\text{s}^{-2}\cdot(0{,}92\ \text{s})^2}$$

$$= 0{,}1944\ \text{m}$$

(d-e) Zusätzlich zum Drehmoment der Gewichtskraftkomponente wirkt jetzt auch noch das Drehmoment, das von der Feder ausgeübt wird.

Das gesamte rücktreibende Drehmoment ist damit

$$M_{\text{rück}} = -(k^{*}\beta + mgd\sin\beta)$$

Bei kleinen Auslenkungen gilt $\sin\beta \approx \beta$ und damit wird das rücktreibende Drehmoment

$$M_{\text{rück}} = -(k^{*}\beta + mgd\beta) = -(k^{*} + mgd)\beta$$

Nach Newton folgt

$$J_{\text{P}}\ddot{\beta} + (k^{*} + mgd)\beta = 0$$

Diese Differentialgleichung normiert liefert

$$\ddot{\beta} + \frac{k^{*} + mgd}{J_{\text{P}}}\beta = 0$$

Vergleich mit der Standarddifferentialgleichung einer reibungsfreien Drehschwingung ergibt sich

$$\ddot{\beta} + \omega^{2}\beta = 0$$

und damit

$$\frac{k^{*} + mgd}{J_{\text{P}}} = \omega_3^2$$

Da das rücktreibende Drehmoment größer wird folgt direkt, dass die Eigenkreisfrequenz ω größer wird und damit die Schwingungsdauer notwendig kleiner wird, da $T \sim \frac{1}{\omega}$.

Berechnung der Schwingungsdauer

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\text{P}}}{k^{*} + mgd}} < T_2 \text{ und } T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\text{P}}}{k^{*} + mgd}} < T_1$$

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\text{P}}}{k^{*} + mgd}} = 0{,}531\,\text{s}$$

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Die Zustandsgleichung idealer Gase für den Zustand '1' liefert die Teilchenmenge

$$n = \frac{p_1 V_1}{R_m T_1} = \frac{0{,}950 \cdot 10^5\,\mathrm{N}\ \ 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}^2 (8{,}31\,\mathrm{N\,m\,mol^{-1}K^{-1}})\,283\mathrm{K}} = 0{,}162\,\mathrm{mol}.$$

b) Für die isobare Zustandsänderung von '3' → '1' gilt

$$T_3 = \frac{V_3}{V1} T_1 = \frac{2{,}0\,\mathrm{l}}{4{,}0\,\mathrm{l}}\ \ 283\mathrm{K}$$

$$T_3 = 141{,}5\,\mathrm{K}.$$

Mit der isentropen Zustandsänderung von '1' → '2' und $\kappa(\mathrm{He}) = \frac{5}{3}$ (einatomiges Gas) folgt ($V_3 = V_2$)

$$T_2 = \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\kappa-1} T_1 = 2^{0.67}\,283\,\mathrm{K}$$

$$T_2 = 450\,\mathrm{K}.$$

c) Bei diesem Kreisprozeß wird nur Q_{23} abgegeben:
$Q_{12} = 0$ (isentrope Kompression)
$Q_{31} > 0$ (isobare Expansion mit $\Delta V_{12} > 0$ und $\Delta U_{31} > 0$)

Für die isobare Zustandsänderung von (3) nach (1) gilt

$$Q_{31} = n\,C_{mp}(\mathrm{He})(T_1\quad T_3)\quad ,$$

wobei $C_{mp}(He) = \frac{5}{2} R_m$.

Somit ist $Q_{zu} = Q_{31}$ oder

$$Q_{zu} = 0{,}162\,mol\,\frac{5}{2}\,8{,}31\,J mol^{-1} K^{-1}(141{,}5\,K)$$

$$Q_{zu} = 475\,\mathrm{J}$$

d) Es ist

$$W_{31} = -\int_{V_3}^{V_1} p_1 V = -p_1 (V_1 - V_3)$$

$$= -\left(0{,}950 \cdot 10^5\,\mathrm{Nm^{-2}}\right)\left(4{,}0 - 2{,}0\right)10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$

$$W_{31} = -190\,\mathrm{J}$$

$W_{23} = 0\,\mathrm{J}$ (isochore Zustandsänderung mit $\Delta V_{23} = 0$)

und

$$W_{12} = \Delta U_{12} = nC_{mv}\,(He)(T_2 - T_1)$$
$$= 0{,}162\,mol\,\frac{3}{2}\,8{,}31\,J mol^{-1} K^{-1} (167\,K)$$
$$W_{12} = 336\,J \quad \text{(isentrope Zustandsänderung mit } \Delta Q_{12} = 0\text{).}$$

Somit ergibt sich für die mechanische Nutzarbeit

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{31}$$
$$= (336 + 0 - 190)\,J$$
$$W = 146\,J$$

Dies bestätigt nochmals, dass bei einem linksläufigen Kreisprozeß insgesamt Arbeit hineingesteckt werden muss, um Wärme entgegen dem natürlichen Temperaturgefälle zu transportieren.

e) Die Leistungszahl (Güteziffer) □ dieser Kältemaschine beträgt

$$\varepsilon = \frac{Q_{zu}}{IWI} = \frac{Q_{31}}{IWI} = \frac{475\,J}{146\,J} = 3{,}2$$

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Es gilt

$L_1 = L(r_1) = 90\ \text{dB}$

Somit folgt für die zugehörige Intensität

$$L_1 = 10 \lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right)\ \text{dB}$$

Aufgelöst nach I_1

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10\ \text{dB}}} = 10^{-12} \cdot 10^{9}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 10^{-3}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

b) $10\ \text{s}$ später ist die Quelle um $x = v_Q t = 180\ \text{m}$ weiter entfernt

$r_2 = r_1 + x = 190\ \text{m}$

Es gilt für die Intensitäten

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{{r_1}^2}{{r_2}^2}$$

$$\Rightarrow I_2 = I_1 \frac{{r_1}^2}{{r_2}^2} = 2{,}77 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Für den Pegel folgt

$$L_2 = 10 \lg\left(\frac{I_2}{I_0}\right)\ \text{dB} = 64{,}42\ \text{dB}$$

c) f_0 ist die Frequenz der Schallwelle bei ruhendem Mikrofon und ruhender Schallquelle.

f_{weg} ist die Frquenz bei ruhendem Mikrofon und sich entfernender Schallquelle

Für das Frequenzverhältnis folgt

$$\frac{f_{\text{weg}}}{\text{f}_0} = \frac{1}{1 + \frac{v_{\text{Q}}}{c}} = 0{,}95$$