

## Klausur WS 03/04 VU2

### Aufgabe 1: (3 Punkte)

Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit des Minutenzeigers einer klassischen Analoguhr? Geben Sie das Ergebnis in rad/s an.

Der Minutenzeiger hat eine konstante Umlaufgeschwindigkeit und braucht für einen vollen Umlauf um das Zeigerblatt der Uhr 1 Stunde (und nicht 1 Minute). Die Winkelgeschwindigkeit beträgt somit

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{60 \cdot 60 \text{ s}} = 0,00175 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 1,75 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

### Aufgabe 2: (5 Punkte)

Ein Eishockey-Puck mit einem Gewicht von 1,1 N gleitet auf dem Eis  $t = 1,25 \text{ s}$  lang, bevor er zum Stillstand kommt.

Wie groß ist die Reibungskraft zwischen Eis und Puck, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit 0,6 m/s ist? Wie groß ist die Gleitreibungszahl?

Puck:

die Beschleunigung ist  $|a| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,6 \text{ m/s}}{1,25 \text{ s}} = 0,48 \text{ m/s}^2$  damit ist die

Gleitreibungszahl  $\mu = \frac{F_R}{F_N} = \frac{a}{g} = 0,05$  und  $F_R = \mu F_N = 0,054 \text{ N}$

### Aufgabe 3: (4 Punkte)

Auf welche Höhe  $h$  ist eine Wassermenge von  $6000 \text{ m}^3$  zu pumpen, wenn ihre potentielle Energie um 850 kWh zunehmen soll? ( $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ )

Die Änderung der potentiellen Energie ist  $\Delta E_{\text{pot}} = \Delta(m \cdot g \cdot h)$

Die Pumphöhe beträgt

$$h = \frac{850 \cdot 10^3 \cdot 3600}{9,81 \cdot 6000 \cdot 10^3} \text{ m} = 52 \text{ m}$$

### Aufgabe 4: (6 Punkte)

Zwei Raumkapseln sind mit einer Rakete ins All befördert worden und werden nun durch eine zwischen ihnen angebrachte Sprengladung voneinander getrennt. Die Massen der Kapseln seien 1200 kg und 1800 kg, der bei der Sprengladung übertragene Kraftstoß sei 600 Ns. Mit welcher relativen Geschwindigkeit driften die beiden Raumkapseln auseinander?

Wegen Impulserhaltung gilt für die Geschwindigkeiten (Beträge) der beiden Kapseln:

$$|v_1 : v_2| = m_2 : m_1 = 3 : 2$$

oder

$$|v_1| = 1,5 \cdot |v_2| \quad (\text{Beträge deshalb, da die Kapseln in unterschiedliche Richtungen driften})$$

Eine zweite Gleichung ergibt sich aus der Summe der Impulsänderungen der Teilmassen, die gleich dem Kraftstoß sind:

$$\Delta p = 600 \text{ Ns} = 1200 \text{ kg} \cdot |v_1| + 1800 \text{ kg} \cdot |v_2|$$

damit folgt für die Relativgeschwindigkeit

$$v_{\text{rel}} = |v_1| + |v_2| = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,17 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### **Lösungsvorschlag Aufgabe 5: (4 Punkte)**

Ein Lautsprecher erzeugt mittels einer schwingenden Membran Schallwellen. Die Amplitude der Membran sei auf  $1 \mu\text{m}$  beschränkt. Bei welchen Frequenzen werden Beschleunigungen hervorgerufen, die größer als  $g$  sind?

Für die Beschleunigung einer harmonisch schwingenden Membran gilt

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \underbrace{-x_m \omega_0^2}_{a_{\text{max}}} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Der Maximalwert der Beschleunigung entspricht dem Vorfaktor vor der harmonischen Funktion  $a_{\text{max}} = |x_m \omega_0^2|$ . Für eine Beschleunigung größer als  $g$  gilt damit  $|x_m \omega_0^2| > g$ .

Umgestellt erhält man für die Frequenz

$$f = \frac{|\omega_0|}{2\pi} > \frac{\sqrt{g}}{2\pi \sqrt{x_m}} = \frac{\sqrt{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}{2\pi \sqrt{10^{-6} \text{ m}}} = 498,5 \text{ Hz}.$$

### **Aufgabe 6: (4 Punkte)**

Ein mathematisches Pendel der Pendellänge  $l = 150 \text{ cm}$  hat auf dem Mond die Schwingungsdauer  $T = 6,04 \text{ s}$ . Wie groß ist die Fallbeschleunigung auf dem Mond?

Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels beträgt

$$T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Auf dem Mond ist  $g_M$

$$g_M = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = 1,62 \text{ ms}^{-2}$$

### Lösungsvorschlag Aufgabe 7 (25 Punkte):

a) Beim *elastischen* Stoß ohne Reibung gelten Energie- und Impulserhaltungssatz. Sind die beiden Massen  $m_1$  und  $m_2$  zweier Körper und ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoß  $v_1$  und  $v_2$  bekannt, so erhält man für die Geschwindigkeit  $u_2$  nach dem Stoß:

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Einsetzt ergibt sich  $u_2 = -2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

b) Das Weg-Zeit-Gesetz für eine ungedämpfte harmonische Schwingung lautet

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Durch Ableitung nach der Zeit erhält man das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz

$$v(t) = \dot{x}(t) = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Erneute Ableitung nach der Zeit ergibt das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

c) Die Anfangsbedingung für den Weg des Körpers  $m_2$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  lautet

$$x(0) = x_0 = 0 \text{ m}.$$

Eingesetzt in das Weg-Zeit-Gesetz erhält man

$$0 \text{ m} = x_m \cos(\varphi).$$

Daraus folgt mit  $x_m \neq 0$ ,  $\cos(\varphi) = 0$  und damit  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Das Vorzeichen von  $\varphi$  ergibt sich aus dem Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz mit der Anfangsbedingung

$$v(0) = u_2 = -2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -x_m \omega_0 \sin(\varphi)$$

für  $\omega_0 > 0$ ,  $|x_m| > 0$  als positiv  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ .

d) Mit der Anfangsbedingung  $v(0) = u_2 = -2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und der Federkraft

$$F_m = 165 \text{ N für } x(t) = -x_m$$

wird die maximale Beschleunigung mit  $F(t) = m \cdot a(t)$

$$a_m = \frac{F_m}{m_2} = \frac{165 \text{ N}}{2 \text{ kg}} = 82,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Eingesetzt in das Geschwindigkeits-Zeit Gesetz erhält man

$$-2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -x_m \omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ und damit } \omega_0 = \frac{2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{x_m} \quad (1).$$

Die maximale Beschleunigung ist gleich dem Vorfaktor der Cosinus-Funktion

$$a_m = -x_m \omega_0^2 = 82,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Umgestellt erhält man  $\omega_0^2 = \frac{82,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{-x_m}$  (2).

Einsetzen von (1) in (2) ergibt  $(\frac{2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{x_m})^2 = \frac{82,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{-x_m}$  und  
 daraus folgt  $x_m = -0,00689 \text{ m}$  und  $\omega_0 = 34,4 \frac{1}{\text{s}}$ .

e) Das Weg-Zeit-Gesetz der gedämpften Schwingung lautet

$$x(t) = x_m e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Das Verhältnis zweier Auslenkungen, die 4 Schwingungsperioden  $T_D$  auseinander liegen, ist

$$\frac{x(t)}{x(t + 4T_D)} = e^{+\delta 4T_D} \quad \text{und für } t = 0$$

$$\frac{x(0)}{x(4T_D)} = \frac{3}{2} = e^{+\delta \cdot 4 \cdot T_D}$$

Unter der Annahme einer schwachen Dämpfung gilt die Näherung  $T_D \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,183 \text{ s}$

damit  $\ln(\frac{3}{2}) = \delta \cdot 4 \cdot 0,732 \text{ s}$  und  $\delta = 0,553 \frac{1}{\text{s}}$ .

Für eine schwache Dämpfung ist  $D < 0,1$ . Mit den obigen Werten errechnet man

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{0,138 \frac{1}{\text{s}}}{8,58 \frac{1}{\text{s}}} = 0,016.$$

Es handelt sich somit um eine schwache Dämpfung und die Annahme  $T_D \approx T_0$  war gerechtfertigt.

### **Lösungsvorschlag Aufgabe 8 (20 Punkte):**

a) Die Schallintensität  $I$  wird berechnet aus der Leistung  $P$  und der Fläche  $A$  als

$I = \frac{P}{A}$ . Die Fläche  $A$  im Abstand  $r$  von der Schallquelle ist eine Kugelfläche  $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ .

Der Abstand  $r$ , den  $P_0$  von  $Q_1$  und von  $Q_2$  hat, kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden

$$r = \sqrt{(\frac{d}{2})^2 + a^2} = \sqrt{(1,25 \text{ m})^2 + (3,50 \text{ m})^2} = 3,72 \text{ m}.$$

Damit wird

$$I = \frac{10 \text{ W}}{4 \cdot \pi \cdot (3,72 \text{ m})^2} = 0,0575 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Die Intensität im Punkt  $P_0$  ist die Summe der Intensitäten, die von  $Q_1$  und von  $Q_2$  abgestrahlt werden, und damit

$$I_{\text{ges}} = 2 \cdot I = 0,115 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Der Schallintensitätspegel  $L$  ist damit

$$L = 10 \cdot \log \frac{I_{\text{ges}}}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{0,115 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} = 10 \cdot (\log 0,115 + 12) = 110,6 \text{ dB}$$

b) Am Ort  $P_1$  überlagern sich die beiden Wellen, die von  $Q_1$  und von  $Q_2$  abgestrahlt werden.

Damit ein Minimum der Schallintensität auftritt, muss ihre Phasenverschiebung  $\frac{\pi}{2}$  betragen.

Da beide Töne phasengleich abgestrahlt werden, muss für den Wegunterschied gelten

$$s_2 - s_1 = \frac{\lambda}{2}.$$

Die Wege  $s_1$  und  $s_2$  können mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden

$$s_1 = \sqrt{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{(1,55 \text{ m} - 1,25 \text{ m})^2 + (3,50 \text{ m})^2} = 3,51 \text{ m}$$

und

$$s_2 = \sqrt{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{(1,55 \text{ m} + 1,25 \text{ m})^2 + (3,50 \text{ m})^2} = 4,48 \text{ m}.$$

Damit beträgt der Wegunterschied  $s_2 - s_1 = 4,48 \text{ m} - 3,51 \text{ m} = 0,97 \text{ m}$ .

Für die Frequenz einer Welle gilt  $f = \frac{c}{\lambda}$ .

Mit  $\lambda = 2 \cdot (s_2 - s_1)$  wird damit

$$f = \frac{345 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 0,97 \text{ m}} = 178 \text{ Hz}.$$

### Lösungsvorschlag Aufgabe 9 (25 Punkte):

a) Die Molzahl für das eingeschlossene Heliumgas ist

$$n = \frac{p_1 \cdot V}{R_m \cdot T_1} = \frac{10^4 \text{ Pa} \cdot 0,03 \text{ m}^3}{8,3145 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 293,15 \text{ K}} = 0,124 \text{ mol}$$

b) Den erforderlichen Innendruck  $p_2$  erhält man über das Kräftegleichgewicht  $F_G = F_p$ :  
 (Für die Kraft, die durch den Innen- und Außendruck hervorgerufen wird, benötigt man nur die senkrechten Komponenten des jeweiligen Druckes – einmal von außen  $p_0$ , einmal von innen  $p_2$ , deshalb geht die Querschnittsfläche der Halbkugel ein und nicht die Oberfläche!)

$$\left(m + \frac{1}{2} \cdot m_{KS}\right) \cdot g = \frac{\pi}{4} (d_a^2 \cdot p_0 - d_i^2 \cdot p_2)$$

mit  $m_{KS} = \rho \cdot \frac{\pi}{6} (d_a^3 - d_i^3) = 18,25 \text{ kg}$  und nach  $p_2$  aufgelöst

$$p_2 = \left(\frac{0,386}{0,396}\right)^2 \cdot p_0 - \frac{1009 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 4}{0,386^2 \cdot \pi} = 2,07 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

c) Die erreichte Temperatur  $T_2$  erhält man über die isochore Zustandsänderung des eingeschlossenen Heliums:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad T_2 = T_1 \cdot \frac{p_2}{p_1} = 605 \text{ K} \quad \text{dies entspricht } 332 \text{ }^\circ\text{C}$$

d) Für die isochore Erwärmung des einatomigen Gases He erhält man:

$$Q_{\text{He}} = n \cdot C_{mV} \cdot (T_2 - T_1) = 0,124 \text{ mol} \cdot R_m \cdot \frac{3}{2} \cdot 312 \text{ K} = 481 \text{ J}$$

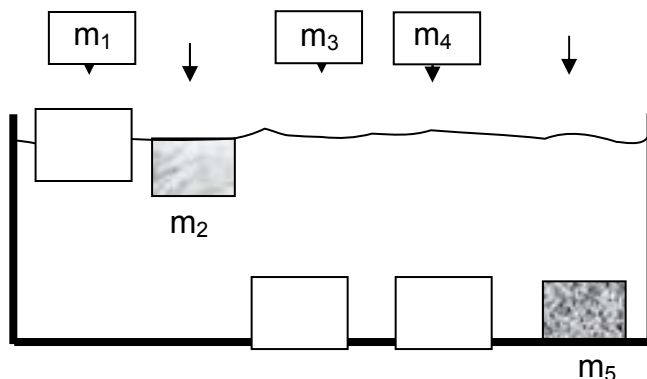
Die von der Kugelschale aufgenommene Wärme ist:

$$Q_{KS} = m_{KS} \cdot c_e \cdot (T_2 - T_1) = 2563 \text{ kJ} \quad \text{dies ist } 5328 \text{ mal größer als } Q_{\text{He}} !$$

### **Aufgabe 10: (4 Punkte)**

Fünf gleich große Körper unterschiedlicher Masse befinden sich nebeneinander in einem Gefäß, das mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Der zweite und der fünfte Körper sind in der Skizze eingezeichnet. Zeichnen Sie die Position der übrigen 3 Körper mit in die Skizze ein und begründen Sie Ihre Entscheidung.

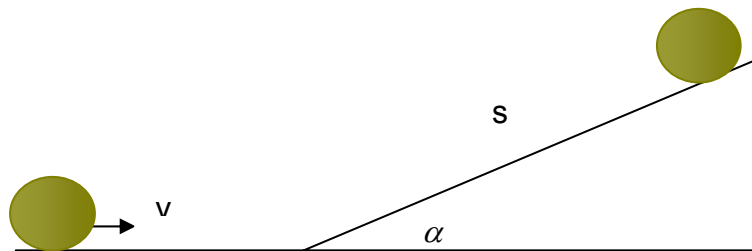
$$m_1 < m_2 < m_3 < m_4 < m_5$$



### **Aufgabe 11: (20 Punkte)**

Eine Kugel der Masse  $m = 80 \text{ g}$  und dem Radius  $r = 5 \text{ cm}$  rollt mit der Geschwindigkeit  $v = 2 \text{ m/s}$  auf eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel

$\alpha = 30^\circ$  zu. Das Massenträgheitsmoment der Kugel ist  $J_S = \frac{2}{5} m \cdot r^2$ , die Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Die Rollreibung ist vernachlässigbar.



- Wie groß ist die kinetische Gesamtenergie der Kugel in der Ebene und welchen Anteil hat daran die Rotationsenergie?
- Wie weit rollt die Kugel die schiefe Ebene hinauf (Rollen ohne zu gleiten). Geben Sie den auf der schiefen Ebene zurückgelegten Weg  $s$  an.
- Welchen Drehimpuls hat die Kugel am Anfang? Stellen Sie den zeitlichen Verlauf des Drehimpulses während des gesamten Vorganges grafisch dar (qualitativ) und diskutieren Sie die Kurve.

### **Lösungsvorschlag Aufgabe 11**

a) Für die gesamte kinetische Energie der Kugel in der Ebene gilt:

$$E_{\text{Ges}} = E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 \quad \text{mit } J_S = \frac{2}{5} m r^2 \quad \text{und} \quad \omega = \frac{v}{r} \quad (\text{Rollbedingung})$$

wird

$$E_{\text{Ges}} = \frac{7}{10} m v^2 = 0,224 \text{ J}$$

der Anteil von  $E_{\text{rot}} = \frac{2}{7} E_{\text{Ges}}$

b) Die erreichte Höhe  $h$  auf der schiefen Ebene folgt aus dem Energiesatz:

$$E_{\text{Ges}} = E_{\text{pot}} = mgh \quad \text{mit } \sin(\alpha) = \frac{h}{s}$$

erhält man den zurückgelegten Weg  $s$ :

$$s = \frac{h}{\sin(\alpha)} = \frac{7v^2}{10 \cdot g \cdot \sin(30^\circ)} = 0,57 \text{ m}$$

c) Der Drehimpuls der Kugel in der Ebene ist konstant und beträgt:

$$L = J_S \omega = \frac{2}{5} m r^2 \frac{v}{r} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ Nms}$$

Der in der Ebene konstante Drehimpuls der Kugel reduziert sich auf der schiefen Ebene durch das konstante äußere Bremsmoment auf  $L = 0$  im höchsten Punkt.