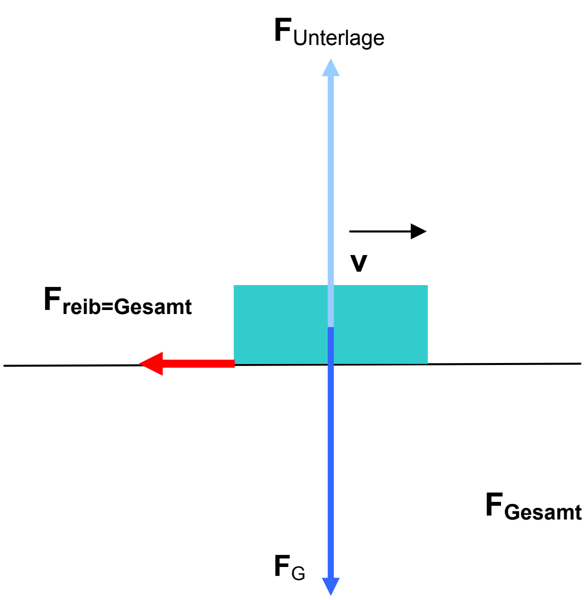
Lösung zu Aufgabe 1 (14 Punkte)

a)Die Gesamtenergie des Systems ist gleich der Spannenergie in der Feder $E_{ges} = \frac{1}{2}cx^2$.

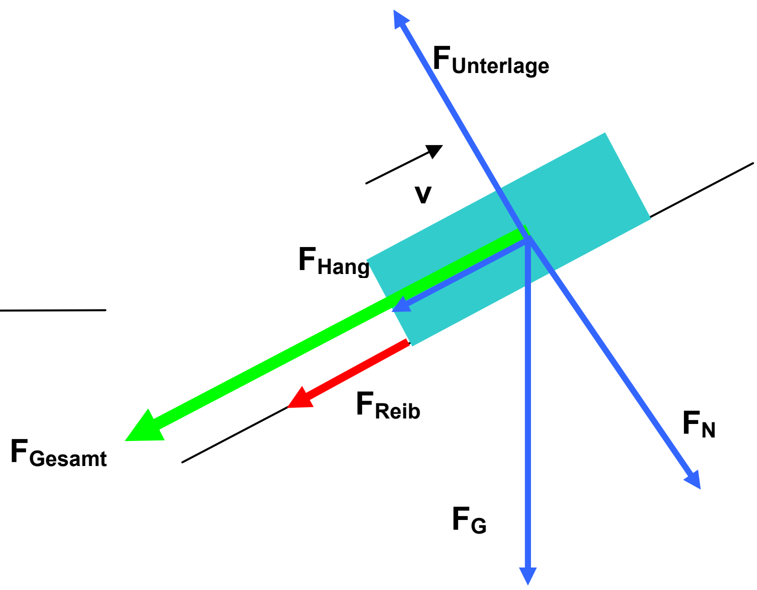
Ohne Reibung wird die Gesamtenergie vollständig in kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ umgesetzt. Aus der Gleichung $\frac{1}{2}cx^2 = \frac{1}{2}mv^2$ erhält man $v = 3{,}16\,\frac{m}{s}$.

b)

Kräfte auf der Ebene



Kräfte am Hang



c)Die Brems-Beschleunigung auf der Ebene wird durch die Reibungskraft verursacht und beträgt $a_{reib,E} = -\mu g = -0{,}02 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = -0{,}196\,\frac{m}{s^2}$.

d)Die Brems-Beschleunigung auf der schiefen Ebene wird durch die Reibungskraft und die Hangabtriebskraft verursacht und beträgt

$$a_{reib,H} = -\mu g \cdot \cos\alpha - g \cdot \sin\alpha = -0{,}02 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cos 30° - 9{,}81\frac{m}{s^2}\sin 30° = -5{,}075\,\frac{m}{s^2}.$$

e) Unter Berücksichtigung der Reibung zwischen Körper und Unterlage verteilt sich die Gesamtenergie nun auf die potentielle Energie des Körpers in der Höhe h $E_{pot} = mgh$, auf den Energieverlust durch Reibung sowohl auf der Ebene $E_{reib,E} = \mu mg\, x_1$ als auch am Hang $E_{reib,H} = \mu mg \cos\alpha\, x_2$.

Damit erhält man folgenden Zusammenhang

$\frac{1}{2}cx^2 = \mu\, mg\, x_1 + \mu\, mg \cos\alpha\, x_2 + mgh$ und mit $x_2 = \frac{h}{\sin\alpha}$ ergibt sich für die Höhe

$$h = \frac{\frac{cx^2}{2mg} - \mu\ x_1}{1 + \mu \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$ und damit $$h = \frac{\frac{500\,\frac{N}{m}\cdot(0{,}2\,m)^2}{2\cdot 2\,kg\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} - 0{,}02\cdot 1m}{1 + 0{,}02\,\frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}} = 0{,}473\,m$$

Lösung zu Aufgabe 2 (15 Punkte)

2a) Der Drehimpuls des aus Scheibe samt Fahrspur und Spielzeugauto bestehenden Systems ändert sich nicht, wenn sich das Spielzeugauto relativ zur Scheibe bewegt, weil wegen der reibungsfreien Drehung der Scheibe kein Moment äußerer Kräfte in Richtung der Drehachse (z-Achse) vorhanden ist:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(J_z \cdot \omega)}{dt} = M_a = 0 \Rightarrow L_z = J_z \cdot \omega = \text{konstant}$$

2a1) Wegen $T_1 < T_0$ folgt für die Winkelgeschwindigkeit des Spielzeugautos $\frac{2\pi}{T_1} > \frac{2\pi}{T_0}$ und

für seinen Drehimpuls $\left(\frac{2\pi}{T_1} \cdot mr^2\right) > \left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot mr^2\right)$.

Weil also der Drehimpuls des Spielzeugautos zugenommen hat, muss wegen des Drehimpulserhaltungssatzes der Drehimpuls der Scheibe (samt Fahrspur) abnehmen und daher muss gelten $\omega_{S_1} < \omega_{S_0}$

Eine zweite einfache Erklärung für $\omega_{S_1} < \omega_{S_0}$ besteht darin, dass sich das Spielzeugauto von der Scheibe abstoßen muss, wenn es sich relativ zur Scheibe bewegen will ($T_1 < T_0$). Daher wird die Scheibe abgebremst und verringert folglich ihre Winkelgeschwindigkeit.

2a2) Wegen des Drehimpulserhaltungssatzes bleibt der gesamte Drehimpuls von Scheibe samt Fahrspur und Spielzeugauto zeitlich konstant und es gilt mit $\omega_{S_0} = \frac{2\pi}{T_0}$:

$$\left(J_S + mr^2\right)\frac{2\pi}{T_0} = J_S\omega_{S_1} + mr^2 \cdot \frac{2\pi}{T_1}$$

$$\omega_{S_1} = \frac{2\pi}{T_0} - \frac{mr^2 \cdot 2\pi}{J_S}\left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right]$$

$$\omega_{S_1} = \frac{2\pi}{3s} + \frac{0{,}08kg \cdot (0{,}5m)^2 \cdot 2\pi}{0{,}2kgm^2}\left[\frac{1}{3s} - \frac{1}{1s}\right]$$

$$\omega_{S_1} = (2{,}094 - 0{,}419)s = 1{,}675s^{-1}$$

$$\omega_{S_1} = 1{,}675s^{-1} < \omega_{S_0} = 2{,}094s$$

2a3) $\omega_{rel} = \frac{2\pi}{T_1} - \omega_{S_1} = \frac{2\pi}{1s} - \frac{1{,}675}{s} = 4{,}608 s^{-1}$

Dabei ist $\frac{2\pi}{T_1} = \omega_{A_1}$ die neue Winkelgeschwindigkeit des Autos, welche ein außerhalb der rotierenden Scheibe stehender Beobachter feststellt. Die auf der Scheibenebene senkrecht stehenden Vektoren $\vec{\omega}_{S_1}$ und $\vec{\omega}_{A_1}$ zeigen ebenso wie die entsprechenden Drehimpulse $\vec{L}_{S_1} = J_S \cdot \vec{\omega}_{S_1}$ und $\vec{L}_{A_1} = (mr^2) \cdot \vec{\omega}_{A_1}$ in dieselbe Richtung.

2b) Auch für diesen Fall gilt wieder der Drehimpulserhaltungssatz. Allerdings ist zu beobachten, dass jetzt die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_{A_1}$ des Spielzeugautos antiparallel zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_{S_1}$ der Scheibe ist:

$(J_S + mr^2) \cdot \vec{\omega}_{S0} = J_S \cdot \vec{\omega}_{S2} + (mr^2)\vec{\omega}_{A2}$ $\Rightarrow$ Mit $|\vec{\omega}_{S0}| = \omega_{S0}$ und $|\vec{\omega}_{A2}| = \omega_{A2} = 2\pi / T_2$ folgt weiter:

$$(J_S + mr^2) \cdot \omega_{S0} = J_S \cdot \omega_{S2} - (mr^2)\frac{2\pi}{T_2}$$

$$\omega_{S2} = \frac{2\pi}{T_0} + \frac{mr^2 \cdot 2\pi}{J_S}\left(\frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_2}\right)$$

$$\omega_{S2} = (2{,}094 + 0{,}838)s^{-1} = 2{,}934 s^{-1}$$

Lösung zu Aufgabe 3 (16 Punkte):

a)Für das allein wirksame, rückdrehende Drehmoment $M_{Rü}$ gilt:

$$M_{Rü} = -2 \cdot F_F \cdot \frac{L}{2} = -2 \cdot C \cdot \Delta x \cdot \frac{L}{2}$$

Die Dehnung bzw. Stauchung Δx der beiden Federn kann über den kleinen Auslenkwinkel β beschrieben werden:

$$\Delta x = \frac{L}{2} \cdot \sin\beta \approx \frac{L}{2} \cdot \beta$$

Mit dem 2. Newton Axiom für Drehbewegungen und dem Massenträgheitsmoment für eine

Stange $\quad J_S = \frac{1}{12} \cdot m \cdot L^2$

Gilt $\quad -\frac{1}{2} \cdot C \cdot L^2 \cdot \beta = J_S \cdot \ddot{\beta} = \frac{1}{12} \cdot m \cdot L^2 \cdot \ddot{\beta} \quad$ daraus $\quad \ddot{\beta} + \frac{6 \cdot C}{m} \cdot \beta = 0$

b)Aus obiger DGL folgt für die Kreisfrequenz der Stange

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6 \cdot C}{m}} = 10 s^{-1} \quad \text{und} \quad f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \omega_0 = 1{,}59 s^{-1} \quad , \quad T_0 = 0{,}628 s$$

c)Nach 10 Perioden gilt für den Auslenkwinkel:

$$\frac{1}{5} \cdot \hat{\beta} = \hat{\beta} \cdot \exp(-\delta \cdot 6{,}28)$$

daraus erhält man die Abklingkonstante $\delta = \frac{\ln 5}{6{,}28} = 0{,}256 s^{-1}$ und den

Dämpfungsgrad $D = \frac{\delta}{\omega_0} 0{,}0256$, d.h. die Schwingung ist schwach gedämpft ($\omega_d \approx \omega_0$).

d)Die nach 10 Schwingungsperioden in Wärme umgewandelte Energie kann aus der Differenz der jeweils maximalen Rotationsenergien der Stange ermittelt werden:

mit $\quad \left|\dot{\beta}_1\right| = \omega_0 \cdot \hat{\beta}_1 = 0{,}8727 rad \cdot s^{-1} \quad$ und $\quad \left|\dot{\beta}_2\right| = \omega_0 \cdot \hat{\beta}_2 = 0{,}1745 rad \cdot s^{-1}$

erhält man für die in Wärme umgesetzte Energie:

$$\Delta E = \frac{1}{2} J_S \cdot \left(\dot{\beta}_1^2 - \dot{\beta}_2^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot 1{,}5 kg \cdot 1 m^2 \left(0{,}8727^2 rad \cdot s^{-2} - 0{,}1745^2 rad \cdot s^{-2}\right) = 0{,}0457 J$$

Aufgabe 4 (15 Punkte):

4a) Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{0{,}3\mathrm{ms}^{-1}}{10\mathrm{s}^{-1}} = 0{,}03\mathrm{m}$

Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{0{,}03\mathrm{m}} = 209{,}44\mathrm{m}^{-1}$

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 20\pi\mathrm{s}^{-1} = 62{,}832\mathrm{s}^{-1}$

Die Wellenfunktion des ersten Wellenerregers lautet:

$E_1: \quad y_1(t) = \hat{y}\sin\omega t$

$$y_1(r_1,t) = \hat{y}\sin(\omega t - kr_1)$$

$$\boxed{y_1(r_1,t) = \hat{y}\sin\left(20\pi\mathrm{s}^{-1}\cdot t - 209{,}44\mathrm{m}^{-1}\cdot r_1\right)}$$

Die Wellenfunktion des zweiten Wellenerregers ist um die Phase π gegenüber dem ersten Wellenerreger verschoben.

$E_2: \quad y_2(t) = \hat{y}\cdot\sin(\omega t + \pi) = -\hat{y}\cdot\sin(\omega t)$

$$y_2(r_2,t) = \hat{y}\sin(\omega t - kr_2 + \pi)$$

$$\boxed{y_2(r_2,t) = \hat{y}\sin\left(20\pi\mathrm{s}^{-1}\cdot t - 209{,}44\mathrm{m}^{-1}\cdot r_2 + \pi\right)}$$

$$\boxed{y_2(r_2,t) = -\hat{y}\sin\left(20\pi\mathrm{s}^{-1}\cdot t - 209{,}44\mathrm{m}^{-1}\cdot r_2\right)}$$

4b) Für alle Punkte P auf der Mittelsenkrechten S ist der Abstand zu beiden Wellenerregern gleich groß, es gilt $r_1 = r_2 = r$ und es folgt, auch aus Symmetriegründen, dass die Amplitude hier stets Null sein muss:

$$y(P,t) = \hat{y}\cdot\sin(\omega t - kr) - \hat{y}\cdot\sin(\omega t - kr) = 0 \quad .$$

4c) Da die Wellen $y_1(r_1,t)$ und $y_2(r_2,t)$ einander **entgegenlaufen**, ergibt sich **eine stehende Welle.**

Die neue Wellenfunktion ist für jeden Augenblick die Summe der Amplituden der beiden einzelnen Wellen:

$$y(P,t) = \hat{y}\cdot\sin(\omega t - kr_1) + \hat{y}\cdot\sin\{\omega t - k(d - r_1) + \pi\}$$

$$y(P,t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega t - kr_1) + \hat{y} \cdot \sin\{\omega t + kr_1 + (\pi - kd)\}$$

Mit Hilfe eines Additionstheorems für Sinusfunktionen ergibt sich die Wellenfunktion einer stehenden Welle mit einer **ortsabhängigen Amplitude** $2\hat{y} \cdot \cos\left\{kr_1 + \frac{(\pi - kd)}{2}\right\}$

$$y(P,t) = 2\hat{y} \cdot \cos\left\{kr_1 + \frac{(\pi - kd)}{2}\right\} \cdot \sin\left\{\omega t + \frac{(\pi - kd)}{2}\right\}$$

4d) Die Wellenfunktion der stehenden Welle lautet nach c):

$$y(P,t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega t - kr_1) + \hat{y} \cdot \sin\{\omega t - k(r_1 - d) + \pi\}$$

$$y(P,t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega t - kr_1) + \hat{y} \cdot \sin\{(\omega t + kr_1) + (\pi + kd)\}$$

Auslöschung erfolgt für eine Phasenverschiebung $\Delta\varphi = (\pi + kd) = (2n + 1)\pi \Rightarrow$

$$d = \frac{2n\pi}{k} = 2n \cdot \frac{\lambda}{2\pi}$$

Dies Ergebnis kann auch aus der Skizze entnommen werden: für völlige Auslöschung beider Wellen muss stets Wellenberg auf Wellental treffen. Da die beiden Wellen mit entgegengesetzter Phase angeregt werden, gilt dies bereits, wenn der Abstand Null ist, beide Erreger also zusammenfallen, der nächst mögliche Abstand ist dann $1 \cdot \lambda$, $2 \cdot \lambda$ usw.

$$\boxed{\begin{array}{l} d = n \cdot \lambda \text{ für } n = 0,1,2,3,... \\ \\ d_n = n \cdot 0{,}03\text{m} = n \cdot 3\text{cm} \quad \Rightarrow \end{array}}$$

$d_0 = 0\text{cm}$, $d_1 = 3\text{cm}$, $d_2 = 6\text{cm}$, $d_3 = 9\text{cm}$ ...