CI 2 – 120 Minuten-Prüfung

Mechanik-Mechanik der deformierbaren-Körper-Schwingungen-Wellen-Optik-Elektrizitätslehre - Gesamtpunktzahl 117 – ohne Gewähr -

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein Hammer (Masse $m = 0{,}2\,\text{kg}$) trifft mit der Geschwindigkeit $v = 5\,\text{ms}^{-1}$ auf einen Nagel. Der Hammer kommt nach der Zeit $t = 4 \cdot 10^{-4}$ s zum Stillstand.

Wie groß ist bei konstanter Verzögerung a der Betrag der mittleren Kraft $\overline{F}$ auf den Hammer?

Lösung Aufgabe 1:

Lösungsweg 1: Die Beziehungen der Kinematik liefern für den Betrag der mittleren Beschleunigung

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Geschwindigkeitsänderung von $v_{Anfang} = 5\,\text{ms}^{-1}$ auf $v_{Ende} = 0\,\text{ms}^{-1}$ (Stillstand)

$$|\Delta\vec{v}| = \left|(0-5)\,\text{ms}^{-1}\right| = 5\,\text{ms}^{-1} \text{ im Zeitintervall } \Delta t = 40\,\text{ms}$$

daraus wird der Betrag der mittleren Beschleunigung (besser Verzögerung)

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5\,\text{ms}^{-1}}{40 \cdot 10^{-3}\,\text{s}} = 1.25 \cdot 10^4\,\text{ms}^{-2}$$

und der Betrag der mittleren Kraft

$$\overline{F} = m\overline{a} = 0.2\,\text{kg} \cdot 1.25 \cdot 10^4\,\text{ms}^{-2} = 2.50 \cdot 10^3\,\text{N} = 2.50\,\text{kN}$$

Lösungsweg 2: Impulsänderung durch Kraftstoß

Der Betrag der Impulsänderung ist

$$|\Delta\vec{p}| = \left|\vec{p}_{ende} - \vec{p}_{anfang}\right| = \left|m(v_{ende} - v_{anfang})\right|$$
$$= \left|0.2\,\text{kg} \cdot (-)\,5\text{ms}^{-1}\right| \cdot = 1.0\,\text{kgms}^{-1}\,(\text{ss}^{-1}) = 1.0\,\text{Ns}$$

Eine Impulsänderung $\Delta\vec{p}$ wird durch einen Kraftstoß $\int_{t_A}^{t_E} \vec{F}(t)dt$ bewirkt.

Für eine zeitlich konstante mittlere Kraft $\overline{F}$ vereinfacht sich das Integral

$$\int_{t_A}^{t_E} \vec{F}(t)dt = \overline{F} \int_{t_A}^{t_E} dt = \overline{F} \cdot (t_E - t_A) = \overline{F} \cdot \Delta t$$

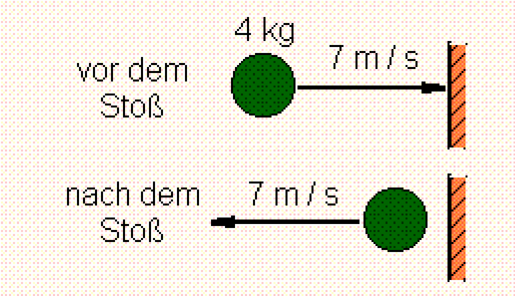
Impulsänderung = Kraftstoß

$$\Delta p = \overline{F} \cdot \Delta t$$

Die mittlere Kraft ist also

$$\overline{F}_{ext} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1.0\,\text{Ns}}{4 \cdot 10^{-4}\,\text{s}} = 0.25 \cdot 10^4\,\text{N} = 2.5 \cdot 10^3\,\text{N} = 2.5\,\text{kN}$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Wie groß ist bei dem skizzierten vollkommen elastischen Stoß der auf die Wand übertragene Impuls?



Lösung Aufgabe 2:

Für die Wahl der Bewegungsrichtungen soll gelten: die Flugrichtung der Kugel vor dem Stoß auf die Wand sei die positive Richtung.
Beim Stoß einer Kugel auf eine Wand ändert sich der Impuls der Kugel um

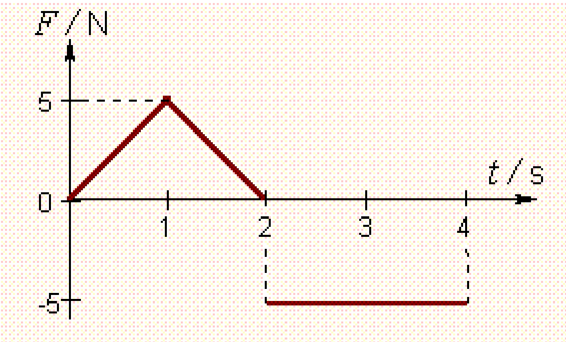
$$\Delta\vec{p}_{Kugel} = \vec{p}_{ende} - \vec{p}_{anfang} = -4\text{ kg}\cdot 7\text{ ms}^{-1} - (4\text{ kg})\cdot 7\text{ ms}^{-1} = -56\text{ kgms}^{-1}$$

Die Änderung des Impulses der Kugel entspricht betragsmäßig dem auf die Wand übertragenen Impuls. Beim Stoß wirken nur innere Kräfte, deshalb muss die Vektorsumme beider Änderungen Null ergeben

$$\Delta\vec{p}_{Kugel} + \Delta\vec{p}_{Wand} = 0$$

$$\Delta\vec{p}_{wand} = -\,\Delta\vec{p}_{Kugel} = -(-56\text{ kgms}^{-1}) = 56\text{ kgms}^{-1}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Auf einen Körper (Masse $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$) wirkt längs seiner geraden Bahn eine zur Bahn parallele zeitabhängige Kraft $F(t)$ [vgl. Skizze].
Welche Endgeschwindigkeit v_E hat der Körper nach $t = 4\,\mathrm{s}$, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10\,\mathrm{ms}^{-1}$ war?



Lösung Aufgabe 3:
Eine Impulsänderung $\Delta\vec{p}$ wird durch einen Kraftstoß auf einen Körper verursacht.

Für ein eindimensionales Problem gilt (Anfangszustand 'A', Endzustand 'E')

$$\Delta p = p_E - p_A = \int_{t_A}^{t_E} F(t)dt$$

Der Wert des Integrals auf der rechten Seite der Gleichung – der Kraftstoß - wird repräsentiert durch die Fläche unter der $F(t)$-Kurve.

Zeitintervall $0s \le t \le 2s$ -

Kraftwirkung auf den Körper in Bewegungsrichtung – positiver Beitrag

Fläche des Dreiecks $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 2s \cdot 5\,N = 5\,Ns$

Zeitintervall $2s \le t \le 4s$ -

Kraftwirkung entgegen der Bewegungsrichtung – negativer Beitrag

Fläche des Rechtecks $A_{Re\,chteck} = 2s \cdot (-5\,N) = -10\,Ns$

Der Kraftstoß insgesamt ist die Summe beider Anteile; also

$$\int_{os}^{4s} F(t)dt = A_{Dreieck} + A_{Re\,chteck} = (5-10)\,Ns$$

$$= -\,5\,Ns = -\,5\,kgms^{-2}s = -\,5\,kgms^{-1}$$

Dieser Kraftstoß entspricht einer Impulsänderung von

$$\Delta p = -\,5\,kgms^{-1}$$

Kraftstoß und Impulsänderung sind negativ.

Anfangsimpuls p_A (Zeitpunkt $t = 0s$)

$$p_A = mv_0 = 1.0\,kg \cdot 10\,ms^{-1} = 10\,kgms^{-1}$$

End-Impuls p_E nach Kraftstoß

$$p_E = p_A + \Delta p$$

$$p_E = 10\ \text{kgms}^{-1} + (-5\ \text{kgms}^{-1}) = 5\ \text{kgms}^{-1}$$

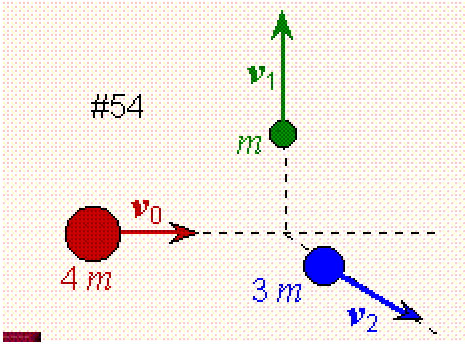
Umrechnung von Impuls p_E auf Geschwindigkeit v_E mit $p_E = mv_E$

$$v_E = \frac{p_E}{m} = \frac{5\ \text{kgms}^{-1}}{1\,\text{kg}} = 5\ \text{ms}^{-1}$$

Es ist $v_E < v_A$; also wird der Körper abgebremst.

Hinweis: die beiden letzten Rechenschritte sind vertauschbar. Die Division aller Impulsgrößen durch die Masse des Körpers ergibt sofort die zugehörigen Geschwindigkeiten.

Aufgabe 4 (8 Punkte)
Ein mit der Geschwindigkeit v_0 fliegender Feuerwerkskörper zerplatzt bei der Zündung in zwei Teilkörper, deren Massen sich wie 1 : 3 verhalten. Die Geschwindigkeit des leichteren Teilkörpers (Masse m) beträgt $v_1 = 3\,v_0$, wobei v_1 senkrecht zu v_0 gerichtet ist.
Wie groß ist der Betrag der Geschwindigkeit v_2 des schwereren Bruchstücks (Masse $3\,m$)?



Lösung Aufgabe 4:

Beim Zerplatzen des Feuerwerkskörpers wirken nur innere Kräfte, deshalb gilt 'Impulserhaltung'

$$\vec{p}_{nach} = \vec{p}_{vor}$$

Die Vektorsumme der Impulse $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ der beiden Bruchstücke muss gleich dem Vektor des Impulses des Feuerwerkskörpers $\vec{p}_{vor}$ vor dem Zerplatzen sein.

$$\vec{p}_{vor} = 4m\vec{v}_0$$

der Erhaltungssatz des Impulses gilt in zwei Koordinatenrichtungen

- in Flugrichtung $\vec{v}_0$ $(\rightarrow)$ (x-Richtung)
- in Richtung senkrecht zur Flugrichtung $(\updownarrow)$ (y-Richtung)

Impulserhaltung in Flugrichtung $\vec{v}_0$ $(\rightarrow)$

Vor dem Zerplatzen:

Impuls des Feuerwerkskörpers $\vec{p}_{vor} = 4m\vec{v}_0$

Nach dem Zerplatzen:

Bruchstück '1' hat keinen Impuls in diese Richtung.

Notwendig ist

Impuls Bruchstück '2' $\vec{p}_{2\rightarrow}$ = Impuls $\vec{p}_{vor}$ vor dem Zerplatzen

$$\left|\vec{p}_{2\rightarrow}\right| = \left|\vec{p}_{vor}\right| = \left|4m\vec{v}_0\right| = 4mv_0$$

Impulserhaltung in Richtung senkrecht zur Flugrichtung $\vec{v}_0$ $(\updownarrow)$

Der Feuerwerkskörper hat vor dem Zerplatzen keinen Impuls in diese Richtung; notwendig kompensieren sich die Impulse von Bruchstück '1' und von Bruchstück '2'

$$\vec{p}_{1\updownarrow} + \vec{p}_{2\updownarrow} = 0$$

Impuls Bruchstück ‘1‘ $\left|\vec{p}_{1\updownarrow}\right| = mv_1 = m(3v_0) = 3mv_0$

Impuls Bruchstück ‘2‘ $\left|\vec{p}_{2\updownarrow}\right| = 3mv_{2\updownarrow}$

Gleichsetzen liefert

$$\left|\vec{p}_{2\updownarrow}\right| = \left|\vec{p}_{1\updownarrow}\right| = 3mv_0$$

Betrag $\left|\vec{p}_2\right|$ des Impulses $\vec{p}_2$ aus den Komponenten (Pythagoras)

$$\begin{aligned}\left|\vec{p}_2\right|^2 &= (p_{2\rightarrow})^2 + (p_{2\updownarrow})^2 \\ &= (4mv_0)^2 + (3mv_0)^2 \\ &= 25(mv_0)^2\end{aligned}$$

und damit

$$\left|\vec{p}_2\right| = 5(mv_0)$$

Gleichsetzen mit $\left|\vec{p}_2\right| = 3mv_2$ ergibt

$$(3m)v_2 = 5(mv_0)$$

Geschwindigkeit des Bruchstücks ‘2‘

$$v_2 = \frac{5(mv_0)}{(3m)} = \frac{5}{3}v_0$$

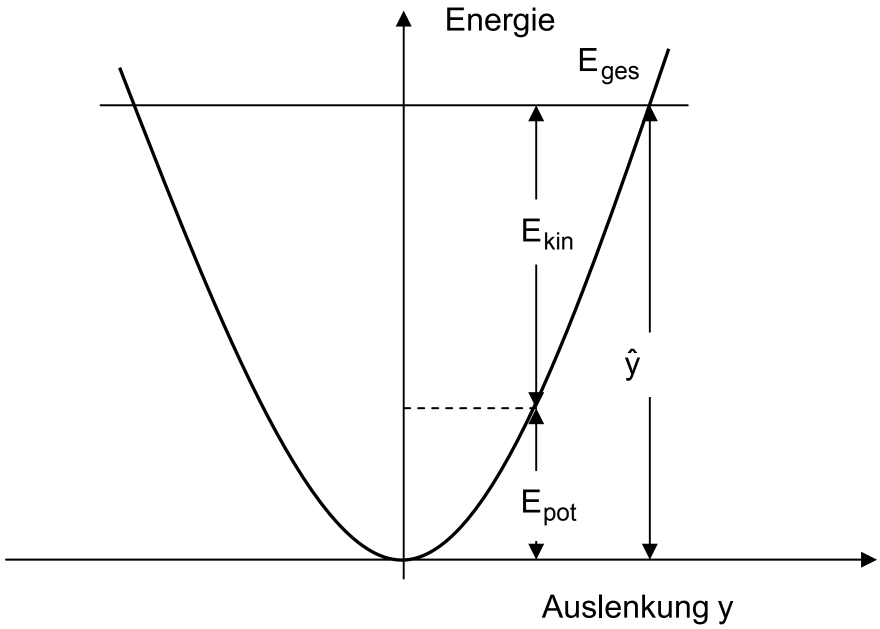
Aufgabe 5 (14 Punkte)
Ein Federpendel schwingt ungedämpft harmonisch. Die Amplitude der Schwingungen ist $\hat{y} = 30\,\text{mm}$.
Bei welcher Auslenkung *y* aus der Ruhelage ist die Geschwindigkeit des schwingenden Körpers gerade gleich der Hälfte der Maximalgeschwindigkeit?

Lösung Aufgabe 5:
Die potentielle Energie der gestauchten oder gedehnten idealen Feder ist

$E_{pot}^{Feder} = \frac{1}{2}cy^2$ Federkonstante (Richtwert) c; Dehnung/Stauchung y

die kinetische Energie des angehängten Körpers ist

$E_{kin}^{Körper} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$



Für eine ungedämpfte Schwingung gilt der Energieerhaltungssatz in seiner mechanischen Schreibweise

$$E_{ges} = E_{pot}^{Feder} + E_{kin}^{Körper} = \frac{1}{2}cy^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

mit den Spezialfällen:

Nulldurchgang

$$E_{ges} = E_{kin}^{Körper} = \frac{1}{2}mv_{max}{}^2$$

Umkehrpunkt

$$E_{ges} = E_{pot}^{Feder} = \frac{1}{2}c\hat{y}^2$$

Für eine Geschwindigkeit $v = \frac{1}{2}v_{max}$ ist die kinetische Energie

$$E_{kin}^{Körper}(v = \frac{v_{max}}{2}) = \frac{1}{2}m(\frac{v_{max}}{2})^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}mv_{max}{}^2 = \frac{1}{4}\cdot E_{ges}$$

also ein Viertel der maximalen kinetischen Energie (= Gesamtenergie) beim Nulldurchgang.
Nach dem Energiesatz ist dann die potentielle Energie der gestauchten/gedehnten Feder

$$E_{pot}^{Feder}(v = \frac{v_{max}}{2}) = \frac{3}{4}\cdot E_{ges} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}c\hat{y}^2$$

$$E_{pot}^{Feder} = \frac{1}{2}cy^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}c\hat{y}^2$$

aufgelöst erhält man für die gesuchte Auslenkung

$$y^2 = \frac{3}{4}\hat{y}^2$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot 30\text{ mm}$$

$$= 26\text{ mm}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Das Coulombgesetz, das die elektrische Kraft zwischen zwei Ladungen beschreibt, lautet:

$$F_G = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}{}^2}$$

Die elektrische Feldkonstante hat den Wert $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ AsV^{-1}m^{-1}.

a)Berechnen Sie die Kraft zwischen einem Proton und einem Elektron im Wasserstoffatom. Der Durchmesser des Wasserstoffatoms beträgt $d = 1 \cdot 10^{-10}$ m. Die elektrische Elementarladung hat die Größe $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C.

b)Wie lautet – ausgedrückt in Grundeinheiten des SI-Systems - die Einheit der elektrischen Feldkonstante ε_0?

Lösung Aufgabe 6:

a) Die Ladung von Elektron und Proton ist genau gleich groß und beträgt $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C.

Der Radius r der Elektronenbahn ist gleich dem halben Durchmesser des Wasserstoffatoms und beträgt damit

$$r = 0{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Nach Einsetzen der Werte erhält man für die Kraft

$$F_G = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1}\text{m}^{-1}} \frac{1{,}60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{(0{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2}$$

$$F_G = 8{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ N}.$$

b) Die Einheit der elektrischen Feldkonstante ε_0 kann man in die Grundeinheiten des Si-Systems Ampere (A), Sekunde (s), Kilogramm (kg) und Meter (m) umformen mit

$$V = \frac{J}{C}$$
$$J = N \cdot m$$
$$C = A \cdot s$$
$$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

$$\frac{A \cdot s}{V \cdot m} = \frac{A \cdot s \cdot C}{J \cdot m} = \frac{A \cdot s \cdot A \cdot s}{J \cdot m} = \frac{A^2 \cdot s^2}{N \cdot m \cdot m} = \frac{A^2 \cdot s^2 \cdot s^2}{kg \cdot m \cdot m^2} = \frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^3}.$$

Aufgabe 7 (15 Punkte)
Ein Körper (Masse $m = 2\,\text{kg}$) wird gegen eine Feder gedrückt, die eine Federkonstante von $c = 500\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ besitzt. Die Feder wird dabei um 20 cm gestaucht. Der Körper befindet sich auf einer horizontalen Fläche. Die Feder wird losgelassen und drückt den Körper weg. Nachdem der Körper eine Stecke von $x = 1\,\text{m}$ zurückgelegt hat, beginnt eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30\,^0$**.** (siehe Skizze).

a)Nehmen Sie zunächst an, die Bewegung sei reibungsfrei. Welche maximale Geschwindigkeit erreicht der Körper?

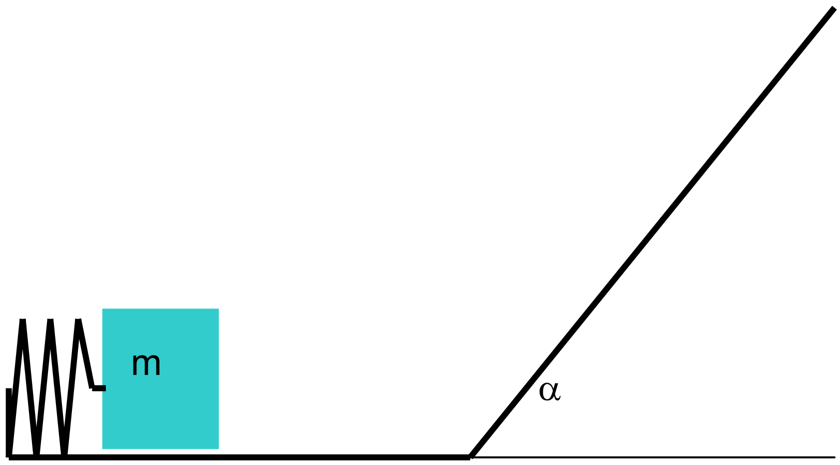
Die Reibung zwischen Körper und ebener Fläche und Körper und Hang wird durch den Reibungskoeffizienten μ = 0,02 beschrieben.

b)Skizzieren Sie die Kräfte auf den Körper auf der Ebene nach Verlassen der Feder und am Hang. Zeichnen Sie jeweils auch die resultierende Kraft ein.

c)Wie groß ist seine Beschleunigung auf der Ebene nach Verlassen der Feder?

d)Wie groß ist seine Beschleunigung auf der schiefen Ebene?

b)Welche maximale Höhe h erreicht der Körper?

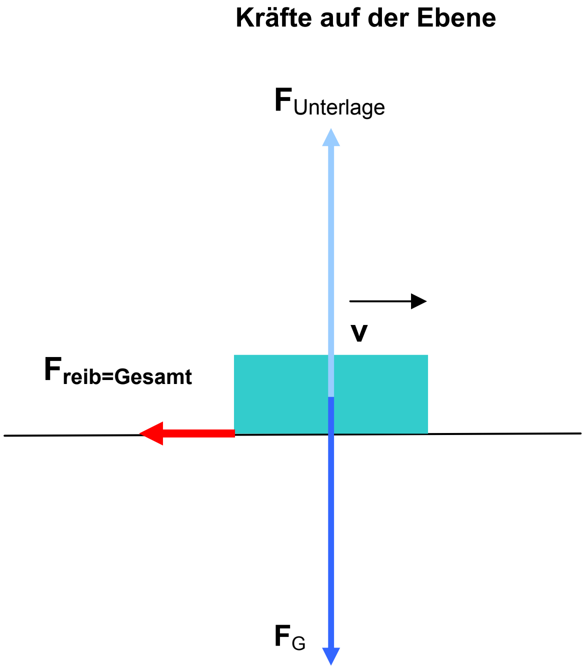


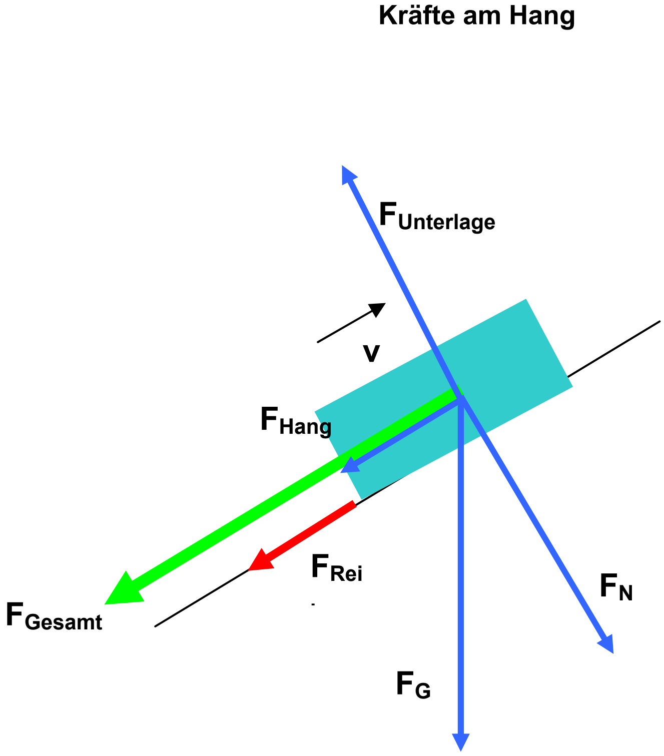
Lösung Aufgabe 7:

a)Die Gesamtenergie des Systems ist gleich der Spannenergie in der Feder $E_{ges} = \frac{1}{2} c x^2$.

Ohne Reibung wird die Gesamtenergie vollständig in kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ umgesetzt. Aus der Gleichung $\frac{1}{2} c x^2 = \frac{1}{2} m v^2$ erhält man $v = 3{,}16\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b)





c) Die Brems-Beschleunigung auf der Ebene wird durch die Reibungskraft verursacht und beträgt $a_{reib,E} = -\mu g = -0{,}02 \cdot 9{,}81 \dfrac{m}{s^2} = -0{,}196 \dfrac{m}{s^2}$.

d) Die Brems-Beschleunigung auf der schiefen Ebene wird durch die Reibungskraft und die Hangabtriebskraft verursacht und beträgt

$$a_{reib,H} = -\mu\, g \cdot \mathbf{cos}\,\alpha - g \cdot \mathbf{sin}\,\alpha = -0{,}02 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \mathbf{cos}\,30° - 9{,}81 \frac{m}{s^2} \mathbf{sin}\,30° = -5{,}075 \frac{m}{s^2}.$$

e) Unter Berücksichtigung der Reibung zwischen Körper und Unterlage verteilt sich die Gesamtenergie nun auf die potentielle Energie des Körpers in der Höhe h $E_{pot} = mgh$, auf den Energieverlust durch Reibung sowohl auf der Ebene $E_{reib,E} = \mu\, mg\, x_1$ als auch am Hang $E_{reib,H} = \mu\, mg\, \mathbf{cos}\,\alpha\, x_2$.

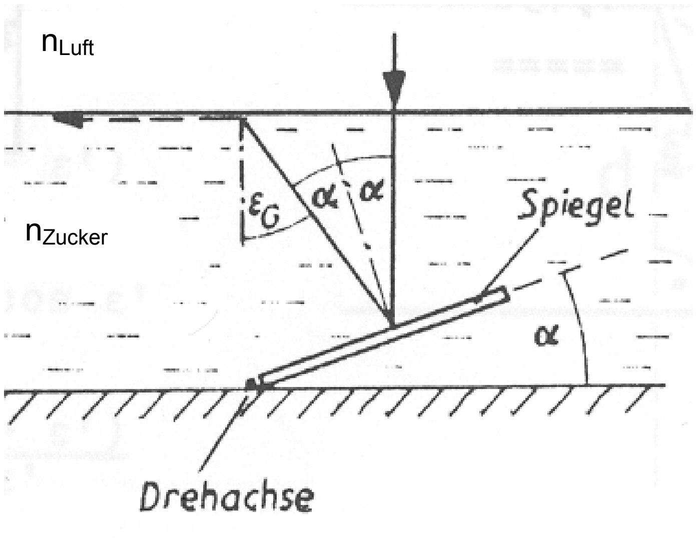
Damit erhält man folgenden Zusammenhang

$\frac{1}{2}cx^2 = \mu mg\, x_1 + \mu mg \cos\alpha\, x_2 + mgh$ und mit $x_2 = \frac{h}{\sin\alpha}$ ergibt sich für die Höhe

$$h = \frac{\frac{cx^2}{2mg} - \mu\, x_1}{1 + \mu \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \quad \text{und damit} \quad h = \frac{\frac{500\,\frac{N}{m}\cdot(0{,}2\,m)^2}{2\cdot 2\,kg\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} - 0{,}02\cdot 1m}{1 + 0{,}02\,\frac{\cos 30°}{\sin 30°}} = 0{,}473\,m$$

Aufgabe 8 (10 Punkte)
Der Brechungsindex n einer Zuckerlösung soll mit einem Refraktometer bestimmt werden. Am Boden des Gefäßes befindet sich ein um eine horizontale Achse drehbar gelagerter Spiegel. Das Gefäß steht an Luft.
Derjenige Neigungswinkel des Spiegels gegenüber der Flüssigkeitsoberfläche, bei dem senkrecht zur Oberfläche eintretendes Licht gerade total reflektiert wird, wird zu $\alpha = 23^0$ ermittelt.

Wie groß ist der Brechungsindex n der Zuckerlösung?



Lösung Aufgabe 8:
Für die Totalreflexion des reflektierten Strahles an der Flüssigkeitsoberfläche gilt

$n_{Zucker} \cdot \sin \varepsilon_{Grenz} = n_{Luft} \cdot \sin 90^o$.

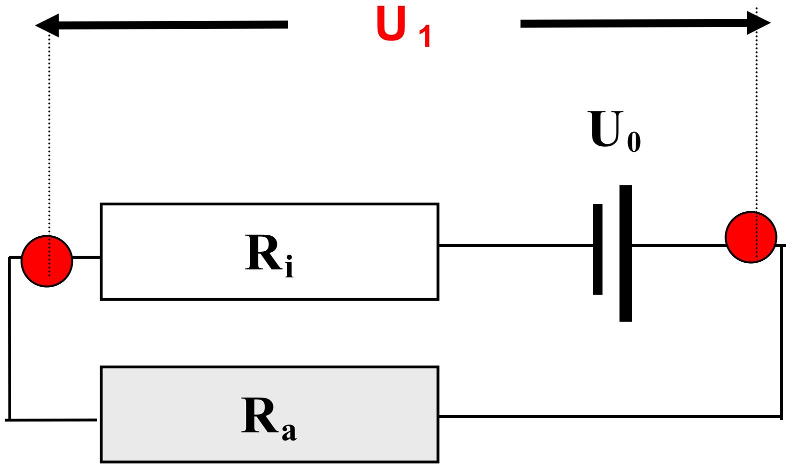
Der Winkel, den der reflektierte Strahl mit dem Lot auf die Flüssigkeitsoberfläche einschließt, ist doppelt so groß wie der Einfallswinkel des einfallenden Strahles auf den Spiegel und beträgt $\varepsilon_{Grenz} = 2 \cdot \alpha$.

$$n_{Zucker} = \frac{1}{n_{Luft} \cdot \sin(2\alpha)}$$

Die Brechzahl von Luft beträgt $n_{Luft} = 1$. Damit erhält man für die Brechzahl der Zuckerlösung $n_{Zucker} = 1{,}39$.

Aufgabe 9 (15 Punkte):
Beim Einschalten eines Batterie betriebenen Magnetrührers sinkt die Klemmenspannung der Batterie auf den Wert U_1 = 9,8 *V*. Dabei fließt ein Strom von I = 170 A durch den Antrieb des Rührers. Ohne Belastung hat die Batterie die Spannung U_0 = 12,8 V.

Welchen Innenwiderstand R_i hat die Batterie?
Welchen Widerstand R_a hat der Antrieb des Rührers?
Bei starker Abkühlung während des Experimentes erhöht sich der Innenwiderstand, so dass $R_i = R_a$ werden kann. Wie groß ist in diesem Fall die Klemmenspannung U_2 beim Einschalten des Magnetrührers?



Lösung Aufgabe 9:

a) Die Klemmenspannung U_1 ist die Spannung, die tatsächlich an den beiden Kontakten der Batterie anliegt. Sie ist kleiner als die Leerlaufspannung, da ein Teil der Spannung am Innenwiderstand der Batterie abfällt.
Der Strom I_{Gesamt} in der Masche ist durch den Gesamtwiderstand bestimmt.

Die Maschenregel ergibt

$$U_0 = U_i + U_a$$

mit Ua $=$ U_1 und c folgt

$$U_0 = U_1 + R_i \cdot I_{Gesamt} \quad .$$

Damit wird der Innenwiderstand

$$R_i = \frac{U_0 - U_1}{I_{Gesamt}} = \frac{12{,}8\,\mathrm{V} - 9{,}8\,\mathrm{V}}{170\,\mathrm{A}} = 18\,\mathrm{m\Omega} = 0{,}018\,\Omega\,.$$

b) Der Widerstand Ra hat nach dem Ohmschen Gesetz den Wert

$$R_a = \frac{U_1}{I_{Gesamt}} = \frac{9{,}8\,V}{170\,A} = 58\,m\Omega = 0{,}058\,\Omega$$

c) Für den Fall, dass beide Widerstände gleich sind, gilt

$$R_i \cdot I_{Gesamt} = R_a \cdot I_{Gesamt} = U_i = U_a = U$$

und die Maschenregel lautet

$U_0 = U_i + U_a = 2 \cdot U$ und damit wird

$$U = \frac{U_0}{2} = \frac{12{,}8\,V}{2} = 6{,}4\,V$$

Aufgabe 10 (15 Punkte):

In einem See nimmt mit zunehmender Tiefe der Druck und die Wassertemperatur zu. Der See hat in der Tiefe eine Temperatur von $\vartheta_1 = 4\,^0\mathrm{C}$ und direkt an der Wasseroberfläche eine Temperatur von $\vartheta_2 = 13\,^0\mathrm{C}$. Kleine Luftblasen nehmen beim Aufsteigen die Temperatur des umgebenden Wassers an. Der Luftdruck beträgt 1024 hPa.

a)In welcher Wassertiefe h beträgt das Volumen V einer aufsteigenden Luftblase ein Zehntel des Volumens, das sie beim Auftauchen an die Wasseroberfläche hat?

b)Berechnen Sie den Druck p_1, der bei der Tiefe h in der Luftblase herrscht.

Nehmen Sie an, das Volumen der Luftblase in der Tiefe betrug $V_1 = 1\ \mathrm{mm}^3$.

c)Zeichnen Sie ein p,V-Diagramm mit den beiden Wertepaaren für Druck und Volumen in der Tiefe und an der Seeoberfläche. Verbinden Sie die Punkte durch eine Gerade. Welche Volumenänderungsarbeit W_{AE} wird dabei insgesamt umgesetzt (Betrag und Vorzeichen)?

Lösung Aufgabe 10:

a) Die Luft in der Luftblase kann als ideales Gas angesehen werden. Es gilt die Zustandsgleichung für ideale Gase für den Zustand der Luft in der Tiefe „T“ und den Zustand der Luft an der Wasseroberfläche „L“

$\frac{p_T \cdot V_T}{T_T} = \frac{p_L \cdot V_L}{T_L}$, dabei soll $V_T = \frac{1}{10} V_L$ sein.

$$\frac{p_T \cdot \frac{1}{10} V_L}{T_T} = \frac{p_L \cdot V_L}{T_L}$$

Der Druck in einer Flüssigkeit der Dichte ρ beträgt in der Tiefe h

$p_T = p_L + \rho g h$, wenn der Druck p_L an der Flüssigkeitsoberfläche herrscht.

$$\frac{(p_L + \rho g h) \cdot \frac{1}{10} V_L}{T_T} = \frac{p_L \cdot V_L}{T_L}$$

Umgestellt nach der Tiefe h erhält man

$h = \frac{p_L}{\rho \cdot g}(10 \frac{T_T}{T_L} - 1)$ und mit den gegebenen Zahlenwerten

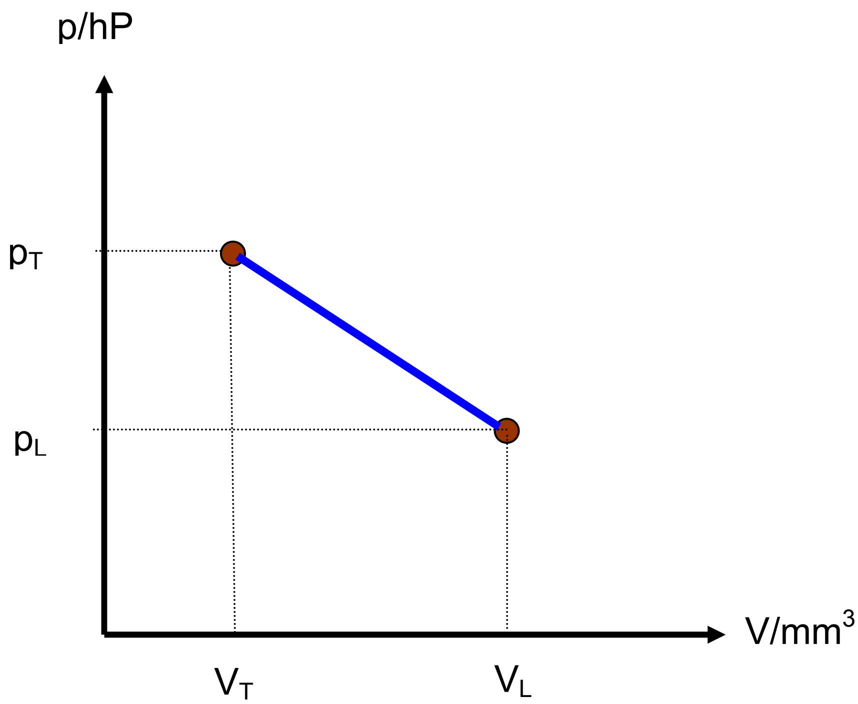
$$h = \frac{1024 \cdot 10^2\ \mathrm{Pa}}{10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} (10 \frac{277\,\mathrm{K}}{286\,\mathrm{K}} - 1) = 9\,\mathrm{m}$$

b)Der Druck in einer Flüssigkeit der Dichte ρ beträgt in der Tiefe h

$p_T = p_L + \rho g h$

$$p_T = 1024\,\text{hPa} + 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 91\,\text{m} = 8937\,\text{hPa}$$

c) Das Volumen der Luftblase in der Tiefe h soll $V_T = 1\,\text{mm}^3$ betragen. Ihr Volumen an der Wasseroberfläche beträgt dann $V_L = 10\,V_T = 10\,\text{mm}^3$. Damit erhält man folgendes p-V-Diagramm



d) Beim Aufsteigen der Luftblase expandiert die Luft und die Arbeit W_{TL} wird von der Luftblase abgegeben, sie ist damit negativ.

Der Betrag der Arbeit entspricht der Trapez-Fläche unter der Geraden und hat den Wert

$$W_{TL} = \frac{(p_T + p_L)}{2}(V_T - V_L) = \frac{(1024\,\text{hPa} + 8937\,\text{hPa})}{2}\cdot(1\,\text{mm}^3 - 10\,\text{mm}^3) =$$

$$\frac{(1024\cdot 10^2\,\text{Pa} + 8937\cdot 10^2\,\text{Pa})}{2}\cdot(10^{-9}\,\text{m}^3 - 10\cdot 10^{-9}\,\text{m}^3)$$

$$= 4980{,}52\cdot 10^2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\cdot(-9\cdot 10^{-9}\,\text{m}^3)$$

$$= -4{,}482245\cdot 10^{-3}\,\text{Nm} = -4{,}5\,\text{mJ} = -0{,}0045\,\text{J}$$

Aufgabe 11 (20 Punkte):

Die Kennlinie einer kleinern Wasser/Sauerstoff-Brennstoffzelle wird im Praktikumsversuch vermessen. Dabei werden folgende Werte aufgenommen:

Spannung U / V	0,89	0,88	0,85	0,82	0,77	0,76	0,72	0,69	0,59	0,51	0,40
Strom I / A	0	0,010	0,015	0,020	0,060	0,075	0,130	0,200	0,445	0,700	1,000

a)Tragen Sie in einem Diagramm die Spannung *U* gegen den Strom *I* auf. Aus dem linearen Teil der Kennlinie soll der ohmsche Widerstand *R* der Brennstoffzelle und sein Fehler ermittelt werden.

Der Widerstand eines Leiters wird berechnet aus:

$R = \rho \frac{d}{A}$ mit

d: Dicke

A: Fläche

□: spezifischem Widerstand.

Die Leitfähigkeit der Brennstoffzelle basiert auf der ionischen Leitfähigkeit einer Protonen leitenden Festelektrolytmembran. Die aktive Fläche beträgt $A = (10{,}00 \pm 0{,}01)\,\mathrm{cm}^3$, die Elektrolytmembran hat eine Dicke von $d = (120 \pm 7)\,\mathrm{nm}$.

b)Berechnen Sie den spezifischen Widerstand ρ der Membran und seinen Fehler.

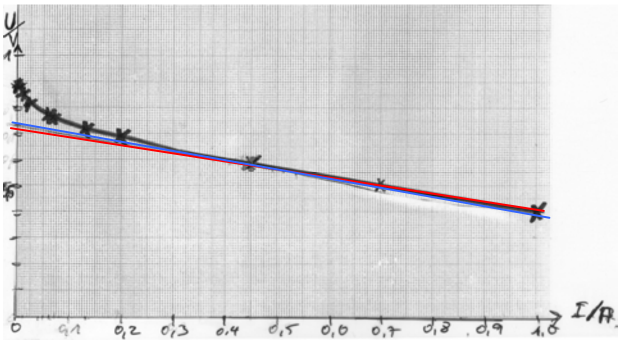
Aus der Literatur entnimmt man für Schwefelsäure die folgenden Werte für die spezifische Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Konzentration bei $\vartheta = 25\ ^0$.

Konzentration/ %	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
Spez. Leitf. ρ/ $\Omega^{-1}\mathrm{cm}^{-1}$ 25°C	0,244	0,428	0,597	0,719	0,796	0,823	0,810	0,763	0,695	0,615	0,524	0,428	0,336	0,253

c)Vergleichen Sie den berechneten Wert der spezifischen Leitfähigkeit mit der Leitfähigkeit von Schwefelsäure. Welcher Konzentration entspricht der Wert?

Lösung Aufgabe 11:

a)



b) Die Steigung der Kurve im linearen Teil der Kennlinie (s. Skizze) ergibt eine Steigung von $R_{Gesamt} = \frac{0{,}73\ V - 0{,}40\ V}{0\ A - 1A} = -0{,}33\ \Omega$. Der Fehler der Steigung wird aus der halben Differenz der maximal möglichen Steigung der Gerade und der minimal möglichen Steigung ermittelt .

$$R_{Minimal} = \frac{0{,}725\ V - 0{,}405\ V}{0\ A - 1A} = -0{,}320\ \Omega$$

$$R_{Minimal} = \frac{0{,}735\ V - 0{,}40\ V}{0\ A - 1A} = -0{,}335\ \Omega$$

Der Fehler der Steigung wir damit

$$\Delta R_{Gesamt} = \pm\frac{R_{Max} - R_{Miin}}{2} = \pm\frac{|0{,}335\ \Omega| - |0{,}320\ \Omega|}{2} = \pm 0{,}0075\ \Omega$$

Der Gesamtwiderstand hat damit den Wert $R_{Gesamt} = \mathbf{(}0{,}330 \pm 0{,}008\mathbf{)}\ \Omega$.

c)Der Kontaktwiderstand hat den Wert $R_{Kontakt} = (0{,}329 \pm 0{,}001)\ \Omega$. Der Widerstand der Membran beträgt $R_{Membran} = |R_{Gesamt}| - |R_{Kontakt}| = 0{,}330\ \Omega - 0{,}329\ \Omega = 0{,}001\ \Omega$.

Der Fehler $\Delta R_{Membran}$ ist die Summe der absoluten Fehler der Widerstände R_{gesamt} und $R_{Kontakt}$

$$\Delta R_{Membran} = \Delta R_{Gesamt} + R_{Kontakt} = 0{,}008\ \Omega + 0{,}001\ \Omega = 0{,}009\ \Omega.$$

Der Widerstand der Membran ist damit $R_{Membran} = \mathbf{(}0{,}001 \pm 0{,}009\mathbf{)}\ \Omega$

Für den Widerstand eines Körpers gilt $R = \rho\frac{d}{A}$. Daraus kann der spezifische Widerstand ρ der Membran ausgerechet werden.

$$\rho_{Membran} = R_{Membran}\frac{A}{d} = 0{,}001\ \Omega\frac{10{,}00\ cm^2}{120 \cdot 10^{-6} m} = 0{,}0083\ \Omega\,m.$$

Für ein reines Potenzgesetz kann der relative Fehler $\frac{\Delta\rho_{Membran}}{\rho_{Membran}}$ der Membran als Summe der relativen Fehler der einzelnen Messwerte berechnet werden.

$$\frac{\Delta\rho_{Membran}}{\rho_{Membran}} = \frac{\Delta R_{Membran}}{R_{Membran}} + \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta d}{d}\,.$$

Damit kann der absolute Fehler berechnet werden

$$\Delta\rho_{Membran} = \rho_{Membran}\left(\frac{\Delta R_{Membran}}{R_{Membran}} + \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta d}{d}\right)$$
$$= 0{,}0083\,\Omega m\left(\frac{0{,}009\,\Omega}{0{,}001\,\Omega} + \frac{0{,}01\,cm^2}{10{,}00\,cm^2} + \frac{7\,\mu m}{120\,\mu m}\right)$$
$$= 0{,}0083\,\Omega m\,(9 + 0{,}001 + 0{,}058)$$
$$= 0{,}0083\,\Omega m \cdot 9{,}068 = 0{,}0753\,\Omega m = 0{,}08\,\Omega m$$

Damit erhält man als Ergebnis für die spezifische Leitfähigkeit der Membran $\rho_{Membran} = (0{,}008\ \pm 0{,}08)\,\Omega m = (1 \pm 8)\,\Omega cm$.

Der Fehler der Messung ist so groß, $\rho_{Membran} = (1 \pm 8)\,\Omega cm$, dass eine Festlegung der Leitfähigkeit der Membran durch diese Messung nicht möglich ist. **Alle** angegebenen Literaturwerte liegen innerhalb dieses Intervalles.