Lösungen VU/VT WS 02/03

Aufgabe 1

Ohne Berücksichtigung der Reibung gilt der Energieerhaltungssatz für die mechanische Energie:

$$E_{Ges}\,(1) = E_{Ges}\,(2)$$

Nach der Fallstrecke l hat sich die potentielle Energie um den Betrag

$\Delta E_{pot}\,(l) = mgl$ vermindert.

Auf Grund der Energieerhaltung ist der Anteil der kinetischen Energie um den gleichen Betrag angewachsen

$$\Delta E_{kin}\,(l) = \Delta E_{pot}\,(l).$$

Die gesamte kinetische Energie setzt sich aus der kinetischen Energie der Translation $E^{kin}_{Trans} = \frac{1}{2} m v^2$ und der kinetischen Energie der Rotation $E^{kin}_{Rot} = \frac{1}{2} J_A \omega^2$ zusammen:

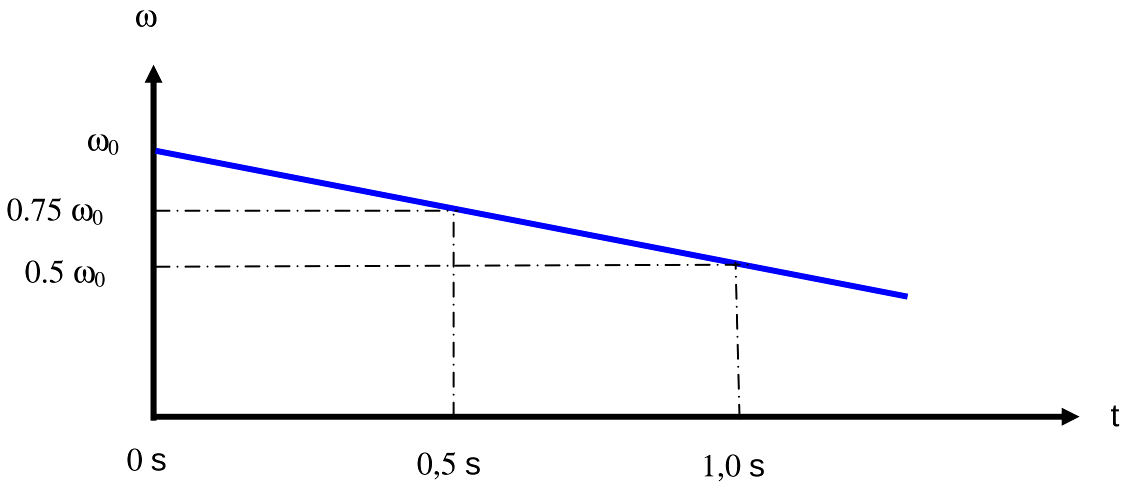
$$\Delta E_{kin}\,(l) = ½\, mv^2 + ½\, J_A\, \omega^2$$

Mit der Rollbedingung $\omega = \frac{v}{r}$ ergibt sich damit $mgl = \frac{m}{2} v^2 + \frac{J_A}{2} \omega^2$

Aufgelöst nach der Geschwindigkeit v erhält man schließlich

$$v = \sqrt{\frac{2gl}{1 + \frac{J_A}{mr^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 10{,}5\,m}{1 + \frac{0{,}92\,kg \cdot m^2}{5{,}2\,kg \cdot 0{,}11\,m^2}}} = 3{,}6\,\frac{m}{s}$$

Aufgabe 2:



b) Der Anfangswert der Winkelgeschwindigkeit des Motors für t = 0 s ist

$$\varpi_0 = 2\pi n_0 = 2\pi \cdot 2800 \frac{1}{60\,s} = 293 \frac{rad}{s}$$

c) Die Winkelbeschleunigung $\alpha(t)$ ist die erste Ableitung der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit:

$$\alpha(t) = \frac{d\varpi}{dt} = -\varpi_0 b$$

Die Winkelbeschleunigung hat den konstanten Wert

$$\alpha = -\varpi_0 b = 293 \frac{rad}{s} \cdot 0{,}5 \frac{1}{s} = 146{,}5 \frac{1}{s^2}$$

d) Das Newtonsche Grundgesetz der Rotation lautet

$$M_{max} = J \cdot \alpha_{max} = 0{,}122\ Nm = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\ kg\ m^2 \cdot 146{,}5 \frac{1}{s^2} = 0{,}1831\,Nm$$

e) Den Drehwinkel $\varphi(t)$ im Zeitintervall 0<t<1 s erhält man durch Integration der Funktion der Winkelgeschwindigkeit $\varpi(t)$

$$\varphi(t) = \int_{0s}^{1s} (\varpi_0 - \varpi_0\, b\, t)dt = [\varpi_0 t - \frac{1}{2}\varpi_0 b t^2]_{0s}^{1s} = 219{,}9\ rad\ \text{berechnet}$$

f) Die Anzahl N der Umdrehungen wird berechnet als $N = \frac{\varphi(t)}{2\pi\ rad} = 23{,}3$

Aufgabe 3:

a) Der Stoß während des Zeitintervalls Δt durch die mittlere Kraft $\overline{F}$ auf den Puck bewirkt eine Beschleunigung des Pucks von seiner Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf eine konstante Endgeschwindigkeit und damit eine Impulsänderung. Der Schwerpunkt des Pucks bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_s in die gleiche Richtung wie die Kraft F.

Die Impulsänderung ist $\Delta p = \Delta(m \cdot v_s) = m(v_s - v_0) = m \cdot v_s$, da die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ ist.

Für den Kraftstoß gilt

$$\Delta p = m v_s = \int \overline{F} \cdot dt = \overline{F} \cdot \Delta t$$

Damit folgt für die Schwerpunktgeschwindigkeit

$$v_s = \frac{\overline{F} \cdot \Delta t}{m} = \frac{11\ N \cdot 0{,}1\ s}{0{,}165\ kg} = 6{,}67\ \frac{m}{s}\ .$$

b) Da die Kraft F nicht zentral auf den Puck trifft, übt sie während des Zeitintervalls Δt = 100 ms ein Drehmoment $M = F\ r_{senkrecht}$ auf den Puck aus.

Die Scheibe dreht sich nach dem Stoß im Gegenuhrzeigersinn.

Der Momentenstoß führt zu einer Winkelbeschleunigung und damit zu einer Drehimpulsänderung des Pucks. Nach Beendigung der Krafteinwirkung bewegt sich der Puck mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um seinen Schwerpunkt

$$\Delta L = J\omega = \int M \cdot dt = M \cdot \Delta t = \overline{F} \cdot r \cdot \Delta t\ .$$

Damit wird die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\overline{F} \cdot r \cdot \Delta t}{J} = \frac{11\ N \cdot 0{,}026\ m \cdot 0{,}1\ s}{1{,}20 \cdot 14^{-4}\ kg\ m^2} = 238\ \frac{rad}{s}\ .$$

c) Die kinetische Energie der Scheibe nach dem Kraftstoß ist die Summe aus der kinetischen Translationsenergie und der kinetischen Rotationsenergie

$$E_{ges} = E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} J\, \omega^2$$

$$\mathrm{E}_{ges} = \frac{1}{2} 0{,}165\ \mathrm{kg} \cdot 6{,}67^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + \frac{1}{2} 1{,}20 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kgm}^2 \cdot 238^2\ \frac{1}{\mathrm{s}^2} = 3{,}67\ \mathrm{J} + 3{,}41\ \mathrm{J} = 7{,}07\ \mathrm{J}$$

Aufgabe 4:

a)Die resultierende Federkonstante ist $c_r = 4 \cdot c = 72\,N \cdot m^{-1}$

somit die Eigenkreisfrequenz $\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{c_r}{m}} = 4{,}24\,s^{-1}}$

und die Schwingungsdauer $\underline{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1{,}48\,s}$

b)Das Weg-Zeit-Gesetz für die gedämpfte Schwingung

lautet $y(t) = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$

c)Für das Amplitudenverhältnis gilt

$\frac{\hat{y}_0 \cdot e^{-\delta \cdot (t + 4 \cdot T_d)}}{\hat{y}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}} = \frac{1}{2}$ daraus folgt $\delta = \frac{\ln 2}{4 \cdot T_d}$

bei schwacher Dämpfung ($T_d \approx T_0$) erhält man $\underline{\delta \approx \frac{\ln 2}{4 \cdot T_0} = 0{,}117\,s^{-1}}$

<u>Lösung ohne Näherung</u>:

Mit $T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ folgt $\delta = \frac{\omega_0 \cdot \ln 2}{\sqrt{64 \cdot \pi^2 + (\ln 2)^2}}$ gilt ebenfalls $\delta = 0{,}117\,s^{-1}$

Der Dämpfungsgrad ist dann $\underline{D = \frac{\delta}{\omega_0} = 0{,}0275}$

Und das Frequenzverhältnis $\underline{\eta_d = \sqrt{1 - D^2} = 0{,}9996}$

d)Die Gleichungen für die Anfangsbedingungen sind

(1) $y(0) = \hat{y}_0 \cdot \cos\varphi_0 = 0$ und (2) $\dot{y}(0) = -\hat{y}_0 \cdot (\delta \cdot \cos\varphi_0 + \omega_d \cdot \sin\varphi_0) = 1m \cdot s^{-1}$

aus (1) folgt $\varphi_{01,2} = \pm\frac{\pi}{2}$ aus (2) folgt $\sin\varphi < 0$ also $\underline{\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}}$

Ferner folgt aus (2) $\underline{\hat{y}_0 = \frac{\dot{y}(0)}{\omega_d} = 0{,}236\,m}$

e)Die mechanische Gesamtenergie ist

$$E(t) = \frac{1}{2} \cdot c_r \cdot \hat{y}^2 = \frac{1}{2} \cdot c_r \cdot \hat{y}_0^2 \cdot e^{-2 \cdot \delta \cdot t} = E_0 \cdot e^{-2 \cdot \delta \cdot t}$$

$$\underline{E_0 = \frac{1}{2} \cdot c_r \cdot \hat{y}_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 72\,N \cdot m^{-1} \cdot (0{,}236\,m)^2 = 2{,}00\,J}$$

$$\underline{E(10s) = E_0 \cdot e^{-2 \cdot 0{,}117 s^{-1} \cdot 10 s} = 0{,}193\,J}$$

Aufgabe 5:

(a) Die Stoffmenge lässt sich aus Masse und molarer Masse darstellen als

$$n = \frac{m}{M\,(H_2)}$$

mit der Molaren Masse für Wasserstoff $M\,(H_2) = 2.0\ \text{g mol}^{-1}$

wird die Stoffmenge

$$n = \frac{m}{M\,(H_2)} = \frac{1.4\ \text{g}}{2.0\ \text{gmol}^{-1}} = 0.7\ \text{mol}$$

(b) Für den Zustand '1' ergibt sich aus der Zustandsgleichung idealer Gase das eingenommene Volumen zu

$$V_1 = \frac{n\,R_m\,T_1}{p_1} = \frac{0.7\ \text{mol}\ 8.31\ \text{J mol}^{-1}\ \text{K}^{-1}\ 300\ \text{K}}{10^5\ \text{N m}^{-2}}$$

$$= 17.5\ \cdot\ 10^{-3}\ \text{m}^3$$

(c) Änderung der inneren Energie bei der Kompression '1'→'2'

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}$$

Bei der Kompression wird dem Gas Arbeit zugeführt $W_{12} = +\,4.0 \cdot 10^3\ \text{J}$

Bei der Abkühlung wird dem Gas Wärme entzogen $Q_{12} = -\,1.0 \cdot 10^3\ \text{J}$

Insgesamt wird

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}$$

$$= -1.0 \div 10^3\ \text{J} + 4.0 \cdot 10^3\ \text{J} = 3.0 \cdot 10^3\ \text{J}$$

Die Änderung ΔU der Inneren Energie U hängt nur von der Temperaturdifferenz $\Delta T = (T_2 - T_1)$ ab.

Für die Änderung der Inneren Energie gilt

$$\Delta U = n\,C_{mv}\,(T_2 - T_1)\,.$$

Die molare isochore Wärmekapazität ergibt sich aus der Zahl der Freiheitsgrade des Wasserstoffmoleküls (zweiatomige, starre Hantel)

$$f_{ges} = f_{trans} + f_{rot} = 3 + 2 = 5$$

zu

$$C_{mv}(H_2) = \frac{5}{2} R_m$$

damit bestimmt sich die Temperatur T_2 zu

$$T_2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^3 \ \mathrm{J}}{5 \cdot 0.7\ \mathrm{mol} \cdot 8.31\ \mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}}} + 300\ \mathrm{K}$$

$$= 206\ \mathrm{K} + 300\ \mathrm{K} = 506\ \mathrm{K}$$

(d) Die Zustandsgleichung idealer Gase liefert für ein geschlossenes System

$$\frac{pV}{T} = \mathrm{const}$$

angewandt auf die Zustände '1' und '2'

$$p_2 = \frac{V_1\ T_2}{V_2\ T_1}\ p_1$$

$$p_2 = \frac{17.5\ \mathrm{dm^3} \cdot 506\ \mathrm{K}}{3.05\ \mathrm{dm^3} \cdot 300\ \mathrm{K}}\ 1.0\ \mathrm{bar} = 9.65\ \mathrm{bar}$$

Alternativer Lösungsweg: Zustandsgleichung für den Zustand '2' anschreiben und die Teilergebnisse von (a) und (c) benutzen.

Aufgabe 6:

Eine konstante Steiggeschwindigkeit $\vec{v}_{steig}$ der Kugel fordert für die Beschleunigung
$\vec{a}_{steig} = 0\,\frac{m}{s^2}$. Nach NEWTON muss damit auch die resultierende Kraft $\vec{F}_{res} = 0\ N$ werden.

Das Problem ist eindimensional; die Umlenkrollen lenken die auf den Körper der Masse M ausgeübte Gravitationskraft nach 'unten' in eine nach 'oben' wirkende Kraft auf die Aluminiumkugel um. Damit wird auch ein eindimensionales Koordinatensystem festgelegt. [Anmerkung: vernachlässigt wird der Einfluss der Umlenkrollen auf die Bewegung.]

- Kräfte nach 'oben' auf die Kugel sind
  - Gewichtskraft auf den Körper der Masse M $\quad F_G^M = Mg$
  - Auftriebskraft auf die Kugel $\quad F_A^m = (\frac{4}{3}\pi R_K{}^3)\rho_{Öl}\, g$

Die Auftriebskraft auf den Körper der Masse M in Luft wird vernachlässigt. Begründung: für die umgebende Luft ist die Dichte etwa $\rho_{Luft} = 1.30\ kg\ m^{-3}$; für ein Metall, z.B. Kupfer, ist die Dichte $\rho_{Cu} = 8.95 \cdot 10^3\ kg\ m^{-3}$.

- Kräfte nach 'unten' auf die Kugel sind
  - Gewichtskraft auf den Körper der Masse m_K $\quad F_G^m = (\frac{4}{3}\pi R_K{}^3)\rho_{Al}\, g$
  - STOKESsche Reibungskraft auf die Kugel $\quad F_R^m = 6\pi\, R_K\, \rho_{Öl}\, v_{steig}$

Weil keine Wirbel auftreten, ist die Strömung laminar und es gilt das STOKESsche Reibungsgesetz mit einer geschwindigkeitsproportionalen Reibung. Bei einer Bewegung der Kugel nach 'oben' ist die Reibungskraft der Bewegungsrichtung entgegengerichtet, also nach 'unten'.

Die resultierende Kraft auf die Kugel wird Null, wenn gilt

$$F_G^M + F_A^m = F_G^m + F_R^m$$

Daraus

$$F_G^M = Mg = F_G^m + F_R^m - F_A^m$$

schließlich

$$M = \frac{F_G^m + F_R^m - F_A^m}{g}$$

Berechnung der einzelnen Terme des Zählers dieser Beziehung