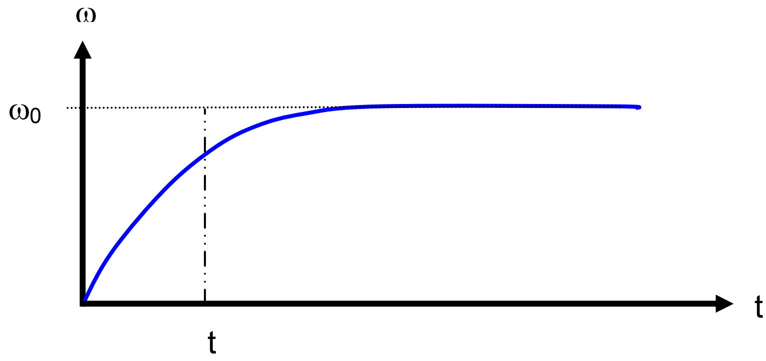
Lösungen FK WS 02/03

Aufgabe 1

a)



b) Der Grenzwert der Winkelgeschwindigkeit des Motors für sehr lange Zeiten wird

$$\varpi(\infty) = \varpi_0 = 2\pi n_0 = 2\pi \cdot 2800 \frac{1}{60\,s} = 293 \frac{rad}{s}$$

c) Die Winkelbeschleunigung $\alpha(t)$ ist die erste Ableitung der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit:

$$\alpha(t) = \frac{d\varpi}{dt} = \frac{\varpi_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

d) Die Winkelbeschleunigung des Motors ist zu Beginn der Bewegung für t=0 s maximal und hat den Wert $\alpha_{max} = \alpha(0\,s) = \frac{\varpi_0}{\tau} = 97{,}7 \frac{rad}{s^2}$.

e) Das Newtonsche Grundgesetz der Rotation lautet

$$M_{max} = J \cdot \alpha_{max} = 0{,}122\ Nm$$

f) Die Funktion des Drehwinkels $\varphi(t)$ erhält man durch Integration aus der Funktion der Winkelgeschwindigkeit $\varpi(t)$

$$\varphi(t) = \int (\varpi_0 - \varpi_0 e^{-\frac{t}{\tau}}) dt + C$$

als $\varphi(t) = \varpi_0 t + \varpi_0 \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + C$

Die Integrationskonstante C wird aus der Anfangsbedingung bestimmt

$$\varphi(0\,s) = 0\ rad = \varpi_0 \tau + C$$, daraus folgt $C = -\varpi_0 \tau$.

Damit lautet die Funktion für den Drehwinkel

$$\varphi(t) = \varpi_0 t + \varpi_0 \tau e^{-\frac{t}{\tau}} - \varpi_0 \tau .$$

g) Nach dem Zeitintervall 0<t < τ = 3s hat der Motor den Drehwinkel

$$\varphi(\tau) = \varpi_0 (\tau - \tau + \tau e^{-1}) = \frac{\varpi_0 \tau}{e} = 323{,}6\,rad$$ überstrichen.

Die Anzahl der Umdrehungen beträgt damit $N = \frac{\varphi(t)}{2\pi\ rad} = 51{,}5$

Aufgabe 2:

a) Der Stoß während des Zeitintervalls Δt durch die mittlere Kraft $\overline{F}$ auf den Puck bewirkt eine Beschleunigung des Pucks von seiner Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf eine konstante Endgeschwindigkeit und damit eine Impulsänderung. Der Schwerpunkt des Pucks bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_s in die gleiche Richtung wie die Kraft F.

Die Impulsänderung ist $\Delta p = \Delta(m \cdot v_s) = m(v_s - v_0) = m \cdot v_s$, da die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ ist.

Für den Kraftstoß gilt

$$\Delta p = m v_s = \int \overline{F} \cdot dt = \overline{F} \cdot \Delta t$$

Damit folgt für die Schwerpunktgeschwindigkeit

$$v_s = \frac{\overline{F} \cdot \Delta t}{m} = \frac{11\ N \cdot 0{,}1\ s}{0{,}165\ kg} = 6{,}67\ \frac{m}{s}.$$

b) Da die Kraft F nicht zentral auf den Puck trifft, übt sie während des Zeitintervalls Δt = 100 ms ein Drehmoment $M = F\, r_{senkrecht}$ auf den Puck aus.

Die Scheibe dreht sich nach dem Stoß im Gegenuhrzeigersinn.

Der Momentenstoß führt zu einer Winkelbeschleunigung und damit zu einer Drehimpulsänderung des Pucks. Nach Beendigung der Krafteinwirkung bewegt sich der Puck mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um seinen Schwerpunkt

$$\Delta L = J\omega = \int M \cdot dt = M \cdot \Delta t = \overline{F} \cdot r \cdot \Delta t\ .$$

Damit wird die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\overline{F} \cdot r \cdot \Delta t}{J} = \frac{11\ N \cdot 0{,}026\ m \cdot 0{,}1\ s}{1{,}20 \cdot 14^{-4}\ kg\ m^2} = 238\ \frac{rad}{s}.$$

c) Die kinetische Energie der Scheibe nach dem Kraftstoß ist die Summe aus der kinetischen Translationsenergie und der kinetischen Rotationsenergie

$$E_{ges} = E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} J\, \omega^2$$

$$E_{ges} = \frac{1}{2} 0{,}165\ \mathrm{kg} \cdot 6{,}67^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + \frac{1}{2} 1{,}20 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg m}^2 \cdot 238^2\ \frac{1}{\mathrm{s}^2} = 3{,}67\ \mathrm{J} + 3{,}41\ \mathrm{J} = 7{,}07\ \mathrm{J}$$

Aufgabe 3:

a)Die resultierende Federkonstante ist $c_r = 4 \cdot c = 72\,N \cdot m^{-1}$

somit die Eigenkreisfrequenz $\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{c_r}{m}} = 4{,}24\,s^{-1}}$

und die Schwingungsdauer $\underline{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1{,}48\,s}$

b)Das Weg-Zeit-Gesetz für die gedämpfte Schwingung

lautet $y(t) = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$

c)Für das Amplitudenverhältnis gilt

$\frac{\hat{y}_0 \cdot e^{-\delta \cdot (t + 4 \cdot T_d)}}{\hat{y}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}} = \frac{1}{2}$ daraus folgt $\delta = \frac{\ln 2}{4 \cdot T_d}$

bei schwacher Dämpfung ($T_d \approx T_0$) erhält man $\underline{\delta \approx \frac{\ln 2}{4 \cdot T_0} = 0{,}117\,s^{-1}}$

<u>Lösung ohne Näherung</u>:

Mit $T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ folgt $\delta = \frac{\omega_0 \cdot \ln 2}{\sqrt{64 \cdot \pi^2 + (\ln 2)^2}}$ gilt ebenfalls $\delta = 0{,}117\,s^{-1}$

Der Dämpfungsgrad ist dann $\underline{D = \frac{\delta}{\omega_0} = 0{,}0275}$

Und das Frequenzverhältnis $\underline{\eta_d = \sqrt{1 - D^2} = 0{,}9996}$

d)Die Gleichungen für die Anfangsbedingungen sind

(1) $y(0) = \hat{y}_0 \cdot \cos\varphi_0 = 0$ und (2) $\dot{y}(0) = -\hat{y}_0 \cdot (\delta \cdot \cos\varphi_0 + \omega_d \cdot \sin\varphi_0) = 1\,m \cdot s^{-1}$

aus (1) folgt $\varphi_{01,2} = \pm\frac{\pi}{2}$ aus (2) folgt $\sin\varphi < 0$ also $\underline{\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}}$

Ferner folgt aus (2) $\underline{\hat{y}_0 = \frac{\dot{y}(0)}{\omega_d} = 0{,}236\,m}$

e)Die mechanische Gesamtenergie ist

$$E(t) = \frac{1}{2} \cdot c_r \cdot \hat{y}^2 = \frac{1}{2} \cdot c_r \cdot \hat{y}_0^2 \cdot e^{-2 \cdot \delta \cdot t} = E_0 \cdot e^{-2 \cdot \delta \cdot t}$$

$$\underline{E_0 = \frac{1}{2} \cdot c_r \cdot \hat{y}_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 72\,N \cdot m^{-1} \cdot (0{,}236\,m)^2 = 2{,}00\,J}$$

$$\underline{E(10s) = E_0 \cdot e^{-2 \cdot 0{,}117 s^{-1} \cdot 10 s} = 0{,}193\,J}$$

Aufgabe 4:

a) Der Mittelwert der Zeitmessung beträgt $\overline{T} = 1{,}205\, s$.

b) Die Standardabweichung des Messverfahrens ist $s_T = 0{,}01581\ s$.

c) Der mittlere Fehler des Mittelwertes wird für N = 10 Messungen

$$\Delta\overline{T} = \frac{s_T}{\sqrt{N}} = 0{,}005\ s.$$

Der relative Fehler des Mittelwertes ist $\frac{\Delta\overline{T}}{\overline{T}} = 0{,}00415 = 0{,}415\,\%$

Das Ergebnis der Messung der Schwingungsdauer lautet damit $T = (1{,}205 \pm 0{,}005)\ s$.

d) Ein mathematisches Pendel hat die Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Daraus kann die Erdbeschleunigung bestimmt werden zu

$$\overline{g} = 4\pi^2 \frac{\overline{L}}{\overline{T}^2} = 4\pi^2 \frac{0{,}36\, m}{1{,}205^2\, s^2} = 9{,}7879 \frac{m}{s^2}$$

Der relative Größtfehler von g wird aus den Fehlern der Messung der Pendellänge und dem Fehler der Messung der Schwingungsdauer errechnet

$$\frac{\Delta\overline{g}}{\overline{g}} = \frac{\Delta\overline{L}}{\overline{L}} + 2\cdot\frac{\Delta\overline{T}}{\overline{T}} = \frac{1}{360} + 2\cdot 0{,}00415 = 0{,}0111 = 1{,}11\%$$

Der absolute Fehler der g-Messung ist damit $\Delta\overline{g} = 0{,}108 \frac{m}{s^2}$, gerundet ergibt sich

$$\Delta\overline{g} = 0{,}1 \frac{m}{s^2}.$$

Damit lautet das Ergebnis der Messung der Erdbeschleunigung

$$g = (9{,}8 \pm 0{,}1) \frac{m}{s^2}.$$

f) Um den relativen Fehler der Erdbeschleunigung auf den Wert 0,008 zu verkleinern muss gelten

$$0{,}008 = \frac{\Delta\overline{g}}{\overline{g}} = \frac{\Delta\overline{L}}{\overline{L}} + 2\cdot\frac{\Delta\overline{T}}{\overline{T}}$$

Nach $\frac{\Delta\overline{T}}{\overline{T}}$ aufgelöst erhält man $\frac{\Delta\overline{T}}{\overline{T}} = 0{,}004 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\overline{L}}{\overline{L}} = 0{,}004 - 0{,}0014 = 0{,}00261$

Damit wird $\Delta\overline{T} = 0{,}00261\cdot\overline{T} = 0{,}00315\ s$ und die Anzahl der Messungen N wird

$$N = \frac{{s_T}^2}{\Delta\overline{T}^2} = \left(\frac{0{,}01581\ s}{0{,}00315\ s}\right)^2 = 25{,}2.$$

Es sind also N=26 Messungen nötig.