CI – WS 2001/02 - Aufgabe 1 (20 Punkte) - Lösung

(a) Die Zustandsgleichung idealer Gase, angewandt auf den Zustand '1' liefert für die Teilchenmenge

$$n = \frac{p_1 V_1}{R_m T_1} = \frac{10^5 \,\text{Nm}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3}{8{,}31\,\text{Nm}\,\text{mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293\,\text{K}} = 0{,}082\,\text{mol}$$

(b) Die mittlere kinetische Energie der Translation eines Moleküls hängt nur von der absoluten Temperatur T ab; es gilt

$$\bar{\varepsilon}_{\text{kin}} = \frac{3}{2} kT \qquad \text{BOLTZMANN-Konstante } k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{JK}^{-1}$$

ein einatomiges Molekül – Helium – kann nur Translationsbewegungen durchführen, (Bei zweiatomigen Molekülen sind auch Rotation und Oszillation als Möglichkeit der Energieaufnahme zu berücksichtigen.)

Für die Anfangstemperatur T_1 erhält man

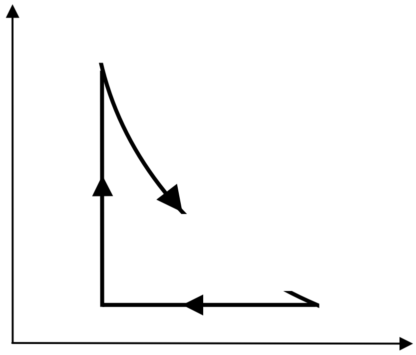
$$\bar{\varepsilon}_{\text{kin}}(T_1) = \frac{3}{2} k T_1 = \frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{JK}^{-1} \cdot 293\,\text{K} = 6{,}07 \cdot 10^{-21}\ \text{J}$$

(c) Die drei Teilprozesse des Kreisprozesses $'1' \to '2' \to '3' \to '1'$ sind folgendermaßen zu klassifizieren

$'1' \to '2'$: isobare Kompression; $p = \text{const.}$

$'2' \to '3'$: isochore Erwärmung; $V = \text{const.}$

$'3' \to '1'$: isotherme Expansion; $T = \text{const.}$



(d1) Für die isobare Zustandsänderung $'1' \to '2'$ vereinfacht sich die Zustandsgleichung auf

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$$

mit der Zusatzforderung

$$V_2 = \frac{1}{4} V_1 [= 0{,}5\ \text{dm}^3]$$

Also

$$T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = \frac{(1/4) V_1}{V_1} T_1 = \frac{1}{4} \cdot 293\,\text{K}$$
$$= 73{,}3\,\text{K}$$

(d2) für die Zustandsänderung $'3' \to '1'$ gilt das BOYLE-MARIOTTsche Gesetz; also handelt es sich um eine isotherme Zustandsänderung; die Temperatur wird konstant gehalten; es ist deshalb

$$T_3 = T_1 = 293\,\text{K}$$

Zwischenüberlegung für die Teilaufgabe (d)

Die Ergebnisse über umgesetzte Wärmen und Arbeiten der Teilaufgabe (d) sind nicht unabhängig voneinander. Die Änderungen der inneren Energie ΔU, die umgesetzte Wärmen Q_{AE} und die umgesetzten Volumenänderungsarbeiten W_{AE} sind über den 1. Hauptsatz miteinander verknüpft; es gilt allgemein

$$\Delta U = U_{\mathrm{E}} - U_{\mathrm{A}} = Q_{\mathrm{AE}} + W_{\mathrm{AE}} \qquad \text{'A' Anfangszustand; 'E' Endzustand}$$

Hat man zwei der physikalischen Größen unabhängig voneinander bestimmt, dann erhält man die Dritte aus dem 1. Hauptsatz. Zur Probe kann natürlich dann die dritte Größe ebenfalls unabhängig bestimmt werden.

Dabei ist die Änderung ΔU der inneren Energie U nur abhängig von der Temperaturdifferenz ΔT der beiden Zustände U_{E} und U_{A}, gemäß

$$\Delta U = n C_{\mathrm{mv}} (T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{A}})$$

Für die Volumenänderungsarbeit gilt allgemein

$$W_{\mathrm{AE}} = -\int_{V_{\mathrm{A}}}^{V_{\mathrm{E}}} p(V)\,\mathrm{d}V$$

Bei der Bestimmung der zugeführten Wärmen benötigt man die **molaren Wärmekapazitäten** C_{mv} und C_{mp}. Diese bestimmen sich aus den Freiheitsgraden des betrachteten Moleküls. Für das einatomige Helium sind nur die Freiheitsgrade der Translation zu berücksichtigen, also ist

$$f_{\mathrm{ges}} = f_{\mathrm{trans}} = 3$$

Die molare isochore Wärmekapazität C_{mv} bestimmt sich daraus zu

$$C_{\mathrm{mv}} = \frac{f_{\mathrm{ges}}}{2} R_{\mathrm{m}} = \frac{3}{2} \cdot 8{,}31\,\mathrm{J mol^{-1} K^{-1}} = 12{,}47\,\mathrm{J mol^{-1} K^{-1}}$$

Die molare isobare Wärmekapazität C_{mp} bestimmt sich daraus zu

$$C_{\mathrm{mp}} = \frac{f_{\mathrm{ges}} + 2}{2} R_{\mathrm{m}} = \frac{5}{2} \cdot 8{,}31\,\mathrm{J mol^{-1} K^{-1}} = 20{,}78\,\mathrm{J mol^{-1} K^{-1}}$$

(e) Prozess '1' → '2' : isobare Kompression

bei konstantem Druck $p_2 = p_1 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$, (vgl. Teilaufgabe (b))

- Kompression des Volumens von V_1 auf $V_2 = \frac{1}{4} V_1$
- Dabei Absenkung der Temperatur von $T_1 = 293\,\mathrm{K}$ auf $T_2 = 73{,}3\,\mathrm{K}$

bei der isobaren Kompression wird Volumenänderungsarbeit zugeführt

mit $p(V) = p_2 = p_1 = \text{const.}$ erhält man

$$W_{12} = -p_2 \int_{V_1}^{V_2} V = -p_1 \cdot (V_2 - V_1) = -1 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot (\frac{1}{4} - 1) \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = +150\,\mathrm{J}$$

Bei der isobaren Kompression abgegebene Wärme

$$\begin{aligned} Q_{12} &= n C_{mp}(T_2 - T_1) = n \cdot \frac{5}{2} R_m \cdot (T_2 - T_1) \\ &= 0{,}082 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}31 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot (73{,}3 - 293) \text{ K} \\ &= -\,374{,}3 \text{ J} \end{aligned}$$

Probe über den 1. Hauptsatz der Wärmelehre; mit den Werten für Q_{12} und W_{12} wird

$$U_2 - U_1 = \Delta U = Q_{12} + W_{123} = (-374{,}4 + 150) \text{ J} = -224{,}3 \text{ J}$$

Die Differenz der inneren Energien $(U_2 - U_1)$ wird aus der Temperaturdifferenz $(T_2 - T_1)$ bestimmt. Man erhält

$$\begin{aligned} \Delta U &= n C_{mv}(T_2 - T_1) = n \cdot \frac{3}{2} R_m \cdot (T_2 - T_1) \\ &= 0{,}082 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8{,}31 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot (73{,}3 - 293) \text{ K} \\ &= -\,224{,}7 \text{ J} \end{aligned}$$

Die Abweichung erklärt sich aus Rundungsfehlern bei den verschiedenen Rechnungsgängen.

Prozess '2' $\rightarrow$ '3': isochore Erwärmung

bei konstantem Volumen $V_3 = V_2$; (vgl. Teilaufgabe (b))

- Erwärmung von $T_2 = 73{,}3 \text{ K}$ auf $T_3 = T_1 = 293 \text{ K}$
- Druckerhöhung von p_2 auf p_3

Bei einem isochoren Prozess ändert sich das Volumen des Gases nicht; also wird auch keine Volumenänderungsarbeit verrichtet

$$W_{23} = 0$$

Deshalb liefert für einen isochoren Prozess der 1. Hauptsatz der Wärmelehre

$$U_3 - U_2 = \Delta U = Q_{23}$$

Die zugeführte Wärme Q_{23} erhöht die innere Energie U des Gases um ΔU gemäß

$$\begin{aligned} \Delta U = Q_{23} &= n C_{mv}(T_3 - T_2) = n \cdot \frac{3}{2} R_m \cdot (T_3 - T_2) \\ &= 0{,}082 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8{,}31 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot (293 - 73{,}3) \text{ K} \\ &= 224{,}6 \text{ J} \end{aligned}$$

Prozess '3' $\rightarrow$ '1': isotherme Expansion

bei konstanter Temperatur $T_3 = T_1 = 293 \text{ K}$; (vgl. Teilaufgabe (b)).

- Expansion von $V_2 = \frac{1}{4} V_1$ auf V_1

Bei einer isothermen Zustandsänderung bleibt die Temperatur T und die Innere Energie U konstant, weil U nur eine Funktion von T ist

$$\Delta U = U_1 - U_3 = Q_{31} + W_{31} = 0$$

also

$$Q_{31} = -W_{31}$$

Die umgesetzte Volumenänderungsarbeit erhält man aus

$$W_{31} = -nR_m T_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right) = -0{,}082\,\text{mol} \cdot 8{,}31\,\text{J}\text{mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293\,\text{K} \cdot \ln(4) = -276{,}8\,\text{J}$$

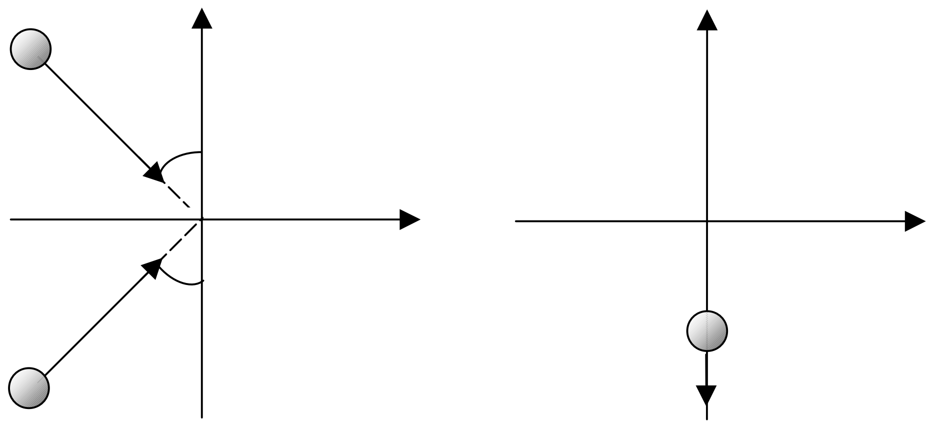
und damit auch

$$Q_{31} = -W_{31} = +276{,}8\,\text{J}$$

Schlussbemerkung: Bei einem Kreisprozess ist der Endzustand identisch zum Anfangszustand. Damit muss die Summe der Änderungen der Inneren Energien der drei Teilprozesse Null sein.

$$\Delta U('1' \to '2') + \Delta U('2' \to '3') + \Delta U('3' \to '1') = -227{,}7\,\text{J} + 224{,}6\,\text{J} + 0 \approx 0$$

CI – WS 2001/02 - Aufgabe 2 (14 Punkte) - Lösung



Zur Bestimmung der beiden unbekannten Größen - Betrag und Richtung der Geschwindigkeit des Körpers '2' – stehen die beiden Beziehungen der Impulserhaltungssatzes für die beiden kartesischen Komponenten zur Verfügung. Dazu kommen die in den Skizzen angegebenen geometrischen Bedingungen.

Zwei Aussagen sind sofort möglich

(1) Körper '1' muss die x-Komponente des Gesamtimpulses nach dem Stoß mitnehmen, weil Körper '2' nach dem Stoß in die negative y-Richtung fliegt und damit keine x-Komponente des Impulses hat.

Die Geschwindigkeiten der beiden Körper vor dem Stoß in *x*-Koordinatenrichtung sind nach Skizze a

$$v_{1x} = v \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, v$$

$$v_{2x} = v \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, v$$

Dieser Gesamtimpuls wird von Körper '1' nach dem Stoß 'mitgenommen'; also gilt

$$m\, v_{1x} + m\, v_{2x} = m\, u_{1x}$$

$$m\frac{1}{2}\sqrt{2}\, v + m\frac{1}{2}\sqrt{2}\, v = m\, u_{1x}$$

$$u_{1x} = \sqrt{2}\, v = 14{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

(2) In *y*-Richtung ist die Impulskomponente vor dem Stoß gleich Null. Deshalb muss Körper '1' einen Impuls in positive *y*-Richtung mitnehmen, der betragsmäßig der Impulskomponente des Körpers '2' in die negative Koordinatenrichtung gleich ist.

$$m\, u_{1y} + m\, u_2 = 0$$

$$u_{1y} = -u_2 = -(-)\, 5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$= 5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Der Beitrag der Geschwindigkeit u_1 ergibt sich aus den beiden Komponenten im rechtwinkligen Dreieck (PYTHAGORAS)

$${u_1}^2 = {u_{1x}}^2 + {u_{1y}}^2$$

$$= 2v^2 + {u_2}^2$$

$$= 200\,\mathrm{m^2\,s^{-2}} + 25\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}$$

$$u_1 = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Für die Richtung des Geschwindigkeitsvektors von Körper '1' nach dem Stoß ergibt sich

$$\tan\varphi = \frac{u_{1y}}{u_{1x}} = \frac{5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{14{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 0{,}35$$

$$\varphi = 19{,}5^{\circ}$$

Das Problem kann auch grafisch gelöst werden. Da die Massen der beiden Stoßpartner gleich sind, kann von 'Impuls' einfach auf 'Geschwindigkeiten' übergegangen werden. Die Addition der Geschwindigkeiten erfolgt nach der Parallelogrammregel.

In ausführlicher Kompenentenschreibweise lauten die Komponentengleichungen des Impulssatzes

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}$$
$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y}$$

Dabei gilt speziell

$$m_1 = m_2 = m$$
$$v_1 = v_2 = v$$

Die Geometrie nach Skizze a vor dem Stoß liefert

$$v_{1x} = v \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, v$$
$$v_{1y} = -v \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\, v$$
$$v_{2x} = v \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, v$$
$$v_{2y} = -v \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, v$$

Die Geometrie nach Skizze b nach dem Stoß liefert

$$u_{2x} = 0$$
$$u_{2y} = -u_2$$

Einsetzen liefert

$$m\frac{1}{2}\sqrt{2}\, v + m\frac{1}{2}\sqrt{2}\, v = m\, u_{1x} + 0$$
$$u_{1x} = \sqrt{2}\, v = 14{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$
$$-m\frac{1}{2}\sqrt{2}\, v + m\frac{1}{2}\sqrt{2}\, v = m\, u_{1y} - m\, u_2$$
$$u_{1y} = u_2 = 5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Der Beitrag der Geschwindigkeit u_1 ergibt sich aus den Komponenten zu

$$u_1^2 = u_{1x}^2 + u_{1y}^2$$
$$= 2v^2 + u_2^2$$
$$= 2\cdot 100\,\mathrm{m^2\,s^{-2}} + 25\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}$$
$$u_1 = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Für die Richtung des Geschwindigkeitsvektors von Körper '1' nach dem Stoß ergibt sich

$$\tan\varphi = \frac{u_{1y}}{u_{1x}} = \frac{5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{14{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 0{,}35$$

$$\varphi = 19{,}5^{\mathrm{o}}$$

(b) Für den schiefen Stoß müssen zur Klassifikation elastisch / inelastisch / vollständig inelastisch ('plastisch') die kinetischen Energien vor und nach dem Stoß miteinander verglichen werden.

Es gilt:

$$W_{\mathrm{kin}}(\mathrm{a}) + Q = W_{\mathrm{kin}}(\mathrm{b})$$

Ein Stoßvorgang ist elastisch, wenn $Q = 0$ und inelastisch, wenn $Q \neq 0$ ist.

Mit den Ergebnissen der Teilaufgabe (a) werden

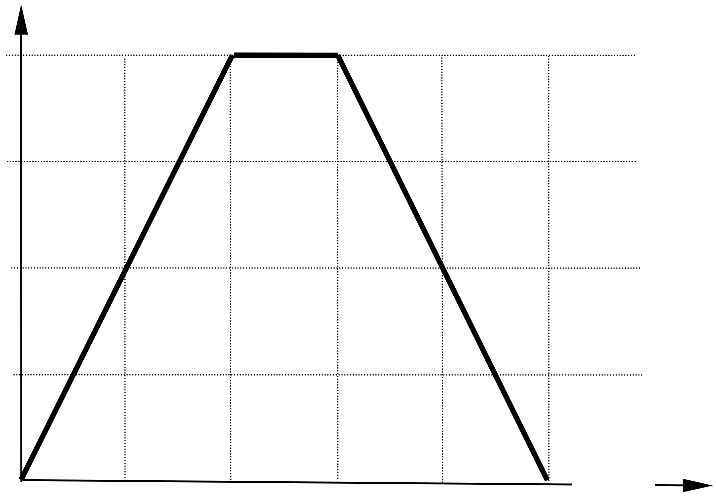
$$\begin{aligned} W_{\mathrm{kin}}(\mathrm{a}) &= 2 \cdot \frac{1}{2} m\, v^2 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} m\,(100\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}) \\ &= \frac{1}{2} m\,(200\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{kin}}(\mathrm{b}) &= \frac{1}{2} m\, u_1^{\,2} + \frac{1}{2} m\, u_2^{\,2} \\ &= \frac{1}{2} m\,(225\,\mathrm{m^2\,s^{-2}} + 25\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}) \\ &= \frac{1}{2} m\,(250\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}) \end{aligned}$$

Die Massen der beiden Körper müssen – weil gleich – dabei gar nicht explizit bekannt sein.

Die kinetischen Energien nach dem Stoß sind größer als die vor dem Stoß.
Der Stoßvorgang ist also inelastisch. Eine positive Reaktionswärme Q bedeutet, dass beim Stoßvorgang Energie zugeführt wird.

CI – WS 2001/02 - Aufgabe 3 (10 Punkte) - Lösung



Es wird die Indizierung ‘A’ für den Anfangszustand und ‘E’ für den Endzustand gewählt.

Der Kraftstoß $\int_{0\,\mathrm{s}}^{10\,\mathrm{s}} F_\mathrm{x}\,\mathrm{d}t$ ist gleich der zeitlichen Änderung des Impulses Δp_x des Körpers. Da nur eine Koordinatenrichtung auftritt, können die Vektorpfeile weggelassen werden.

Das Zeitintegral der äußeren Kraft wird durch die Fläche des Trapezes *‘unter der Kurve $F(t)$’* repräsentiert (geometrisch also durch ein Trapez bzw. durch zwei Dreiecke und ein Rechteck), also ist

$$\Delta p_\mathrm{x} = \int_{0\,\mathrm{s}}^{10\,\mathrm{s}} F_\mathrm{x}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\text{ s}\cdot 8\text{ N} + 2\text{ s}\cdot 8\text{ N} = 48\text{ Ns}$$

(b) Für die Impulsänderung des Körpers gilt

$$\Delta p_\mathrm{x} = p_\mathrm{xE} - p_\mathrm{xA}$$

Der Anfangsimpuls ist $p_\mathrm{xA} = 3\text{ kg}\cdot(-)2\text{ m s}^{-1} = -6\text{ Ns}$

Damit wird

$$\mathrm{p}_\mathrm{xE} = \mathrm{p}_\mathrm{xA} + \Delta\mathrm{p}_\mathrm{x} = (-)\,6\text{ Ns} + 48\text{ Ns} = 42\text{ Ns}$$

Die Verknüpfung zwischen Impuls und Geschwindigkeit über die Masse

$$p_\mathrm{xE} = m\cdot v_\mathrm{E}$$

liefert

$$v_\mathrm{E} = \frac{p_\mathrm{xE}}{m} = \frac{42\text{ Ns}}{3\text{ kg}} = 14\,\frac{\text{kg m s}^{-2}\text{ s}}{\text{kg}} = 14\text{ m s}^{-1}$$

(c) Arbeit-Energie-Theorem: Die zugeführte Arbeit ist gleich der Zunahme der kinetischen Energie der Translation des Körpers.

$$W_{\mathrm{AE}} = E_{\mathrm{kin}}(\mathrm{E}) - E_{\mathrm{kin}}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2} m \cdot v_{\mathrm{E}}{}^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_{\mathrm{A}}{}^2$$

$$= \frac{1}{2} 3\ \mathrm{kg} \cdot (14^2 - (-2)^2)\ \mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 192\ \mathrm{kg\,m\,s}^{-2}\ \mathrm{m} = 288\ \mathrm{J}$$

CI – WS 2001/02 - Aufgabe 4 (16 Punkte) - Lösung

(a) Aus der Schwingungsdauer T_0 erhält man für die Eigenfrequenz

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{4\ \mathrm{s}} = 0{,}25\ \mathrm{s}^{-1}$$

und die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \frac{2\,\pi}{T_0} = \frac{2\,\pi}{4\ \mathrm{s}} = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{s}^{-1}$$

(b) Die Federkonstante c kann aus der Masse m des Körpers und der Eigenkreisfrequenz ω_0 des Federpendels bestimmt werden. Aus

$$\omega_0{}^2 = \frac{c}{m}$$

wird

$$c = m \cdot \omega_0{}^2 = 50 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\pi^2}{4}\ \mathrm{s}^{-2} \cdot (\mathrm{m} \cdot \mathrm{m}^{-1}) = 0{,}123\ \mathrm{Nm}^{-1}$$

(c) Für eine harmonische Schwingung lässt sich das Weg,Zeit-Gesetz darstellen als

$$y = \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad \text{oder} \qquad y = \hat{y} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Amplitude $\hat{y}$ und Nullphasenwinkel φ_0 sind auf die Anfangsbedingungen anzupassen. Diese sind $y(0) = 18\ \mathrm{cm}$ und $\dot{y}(t = 0) = 0$. Bei Auslenken und Loslassen ohne Anfangsgeschwindigkeit muss die Anfangsauslenkung auch gleich der Amplitude sein und bei der Wahl der Kosinus-Funktion zur Beschreibung der Bewegung wird der Nullphasenwinkel gleich Null. Damit kann man schreiben

$$y = 18\ \mathrm{cm} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t\right)$$

[damit können Sie durch Ableiten und Einsetzen des Zeitpunkts $t = 0$ auch nachweisen, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind].

(d) Zum Zeitpunkt $t = 0{,}5\ \mathrm{s}$ wird die Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage

$$y(t = 0{,}5\ \mathrm{s}) = 18\ \mathrm{cm} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}5\ \mathrm{s}\right) = 18\ \mathrm{cm} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 18\ \mathrm{cm} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 12{,}73\ \mathrm{cm}$$

die Geschwindigkeit ergibt sich als erste Ableitung des Weg,Zeit-Gesetzes zu

$$v = \dot{y} = -\hat{y}\,\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0{,}5\ \mathrm{s}$ wird die Geschwindigkeit des Körpers

$$v(t = 0{,}5\ \mathrm{s}) = -18\ \mathrm{cm} \cdot \frac{\pi}{2}\ \mathrm{s}^{-1} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}5\ \mathrm{s}) = -28{,}3\ \mathrm{cm\,s}^{-1} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = -20{,}0\ \mathrm{cm\,s}^{-1}$$

Bei einer Anfangsauslenkung in die positive Koordinatenrichtung ist die Geschwindigkeit in der ersten Viertelperiode auf die Ruhlage hin, also in negative Koordinatenrichtung gerichtet.

(e) Die maximale Geschwindigkeit erhält man bei Nulldurchgang. Die Nullage wird nach einer Viertelschwingung, also nach $t = \frac{T_0}{4} = 1\ \mathrm{s}$ erreicht. Also erhält man durch stures Einsetzen

$$v(t = 1\ \mathrm{s}) = -18\ \mathrm{cm} \cdot \frac{\pi}{2}\ \mathrm{s}^{-1} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 1\ \mathrm{s}) = -28{,}3\ \mathrm{cm\,s}^{-1} \cdot 1 = -28{,}3\ \mathrm{cm\,s}^{-1}$$

Eine einfachere Argumentation liefert: für den Betrag der Sinus-Funktion gilt $0 \le \sin(\omega_0 t) \le 1$; also ist die maximale Geschwindigkeit der Vorfaktor im Geschwindigkeit,Zeit-Gesetz; also

$$|v_{\mathrm{max}}| = \hat{y}\,\omega_0 = 18\ \mathrm{cm} \cdot \frac{\pi}{2}\ \mathrm{s}^{-1} = 28{,}3\ \mathrm{cm\,s}^{-1}$$

Alternative: Bei bekannter Gesamtenergie und Masse des Körpers kann die Geschwindigkeit für den Nulldurchgang (entspannte Feder, potentielle Energie der Feder ist gleich Null) bestimmt werden.

$$E_{\mathrm{ges}} = E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{max}}{}^2$$

$$v_{\mathrm{max}}{}^2 = \frac{2 \cdot E_{\mathrm{ges}}}{m} = \frac{2 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Nm}}{50 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}} = 7{,}96 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$$

$$v_{\mathrm{max}} = 0{,}282\ \mathrm{m\,s}^{-1}$$

Gesamtenergie des Systems: Bei Loslassen $t = 0\ \mathrm{s}$ ist die kinetische Energie des Körpers Null, die Gesamtenergie ist gleich der potentiellen Energie der gespannten Feder. Also

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} c \hat{y}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}123\ \mathrm{Nm}^{-1} \cdot (0{,}18\ \mathrm{m})^2 = 1{,}99 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Nm}$$

Probe: Beim Nulldurchgang (entspannte Feder) ist die Gesamtenergie gleich der kinetischen Energie des Körpers, also

$$E_{\mathrm{ges}} = E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{max}}{}^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\ (0{,}283\ \mathrm{m\,s}^{-1})^2 = 2{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Nm}$$

CI – WS 2001/02 - Aufgabe 5 (20 Punkte) - Lösung

Aus $p_s \sim e^{-\frac{\Delta E}{k \cdot T}}$ folgt durch Logarithmieren $\ln(p_s) \sim \frac{(-\Delta E)}{k} \cdot \frac{1}{T}$

Die sich ergebende Gerade auf einfach-logarithmischen Papier zeigt damit die exponentielle Abhängigkeit des Sättigungsdampfdrucks von der reziproken absoluten Temperatur. Anmerkung: die Benutzung von Logarithmen zur Basis 10 ist hier unerheblich; bei der Berechnung der Geradensteigung sind aber die Logarithmen zur Basis e zu verwenden!

Zunächst sind die reziproken absoluten Temperaturen zu berechnen

$\frac{T}{\mathrm{K}}$	80	90	100	110	120	130	140	150
$\frac{p_S}{\mathrm{kPa}}$	40.7	134	324	666	1214	2027	3170	4736
	12,5	11,1	10,0	9,09	8,33	7,69	7,14	6,67

Die graphische Darstellung findet sich auf der nächsten Seite

Aus der Geradengleichung $\ln(p_s) \sim \frac{(-\Delta E)}{k} \cdot \frac{1}{T}$

ergibt sich also für die Geradensteigung $m_{\mathrm{Gerade}} = \frac{(-\Delta E)}{k}$

Die Aktivierungsenergie wird damit

$$\Delta E = -\, m_{\mathrm{Gerade}} \cdot k$$

Man legt zu Bestimmung der Steigung ein möglichst großes Steigungsdreieck fest, Korrespondierende Wertepaare sind z.B.

$$p_{s2} = 8100\ \mathrm{kPa} \qquad T_2^{-1} = 6{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$$

$$p_{s1} = 10\ \mathrm{kPa} \qquad T_1^{-1} = 14{,}30 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$$

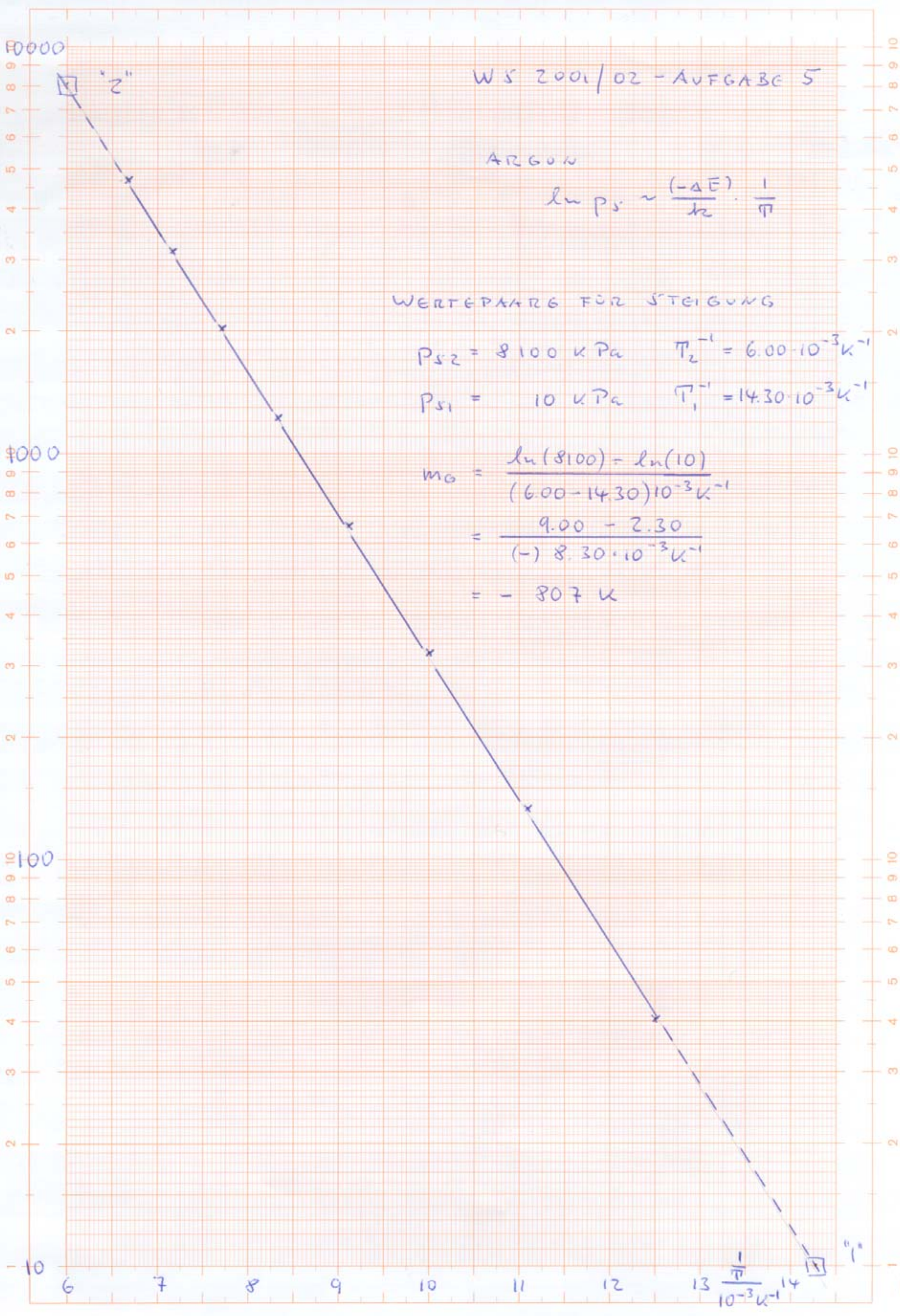
Daraus erhält man die Steigung der Geraden nach der Zwei-Punkte-Formel

$$m_{\mathrm{Gerade}} = \frac{\ln(8100) - \ln(10)}{(6{,}00 - 14{,}30) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}} = \frac{9{,}00 - 2{,}30}{-8{,}30 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}} = -807\ \mathrm{K}$$

für die Aktivierungsenergie ergibt sich

$$\Delta E = (-)(-\,807\ \mathrm{K}) \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{JK}^{-1}$$

$$\Delta E = 1{,}11 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{J}$$



WS 2001/02 – AUFGABE 5

ARGON

$$\ln p_s \sim \frac{(-\Delta E)}{k} \cdot \frac{1}{T}$$

WERTEPAARE FÜR STEIGUNG

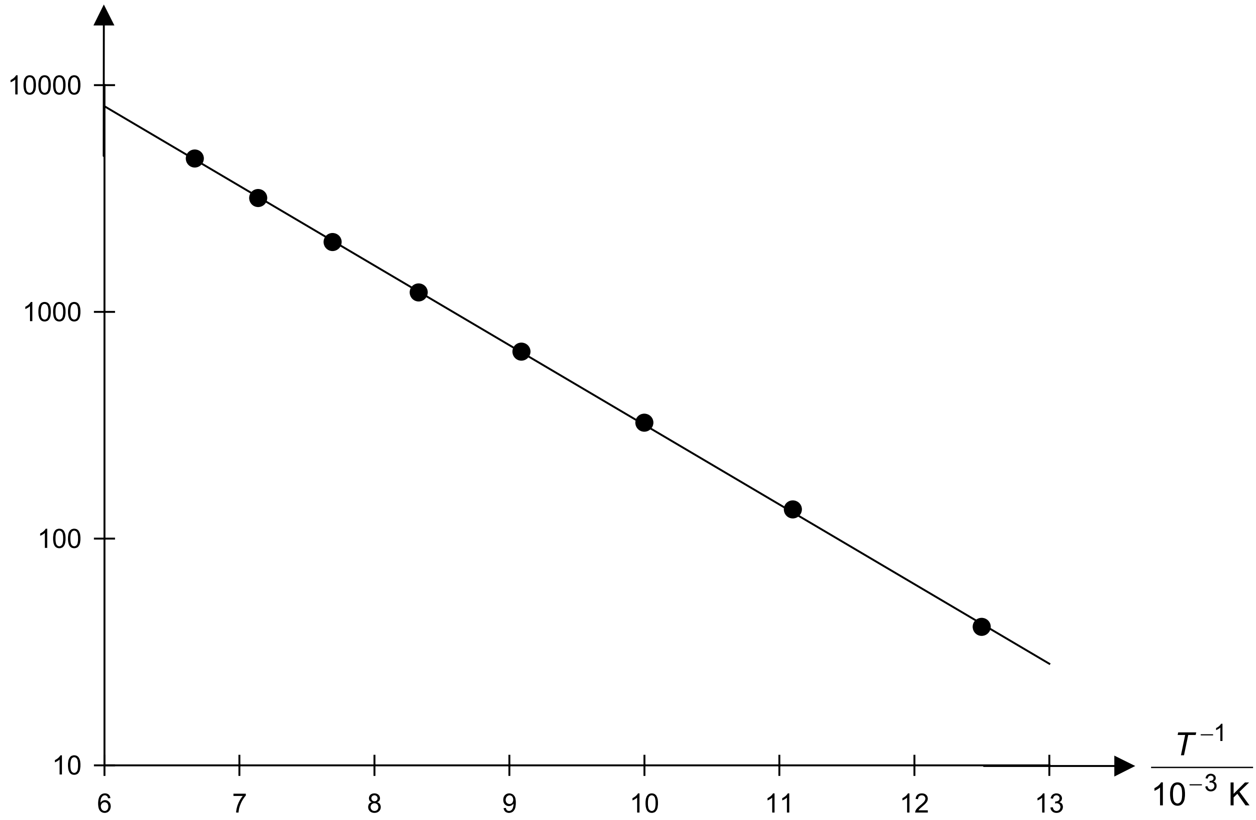
$p_{s2} = 8100\ kPa$ $\quad T_2^{-1} = 6.00 \cdot 10^{-3} K^{-1}$

$p_{s1} = 10\ kPa$ $\quad T_1^{-1} = 14.30 \cdot 10^{-3} K^{-1}$

$$m_G = \frac{\ln(8100) - \ln(10)}{(6.00 - 14.30)10^{-3}K^{-1}}$$

$$= \frac{9.00 - 2.30}{(-)\ 8.30 \cdot 10^{-3}K^{-1}}$$

$$= -807\ K$$



CI – WS 2001/02 - Aufgabe 6 (20 Punkte) - Lösung

(a) für die Dichte der homogenen Ni-Eisen-Kugel erhält man

$$\rho_K = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{m_K}{V_K} = \frac{m_K}{(4/3)\pi R^3} = \frac{15{,}123\ \mathrm{g}}{(4/3)\pi(7{,}63\cdot 10^{-1}\ \mathrm{cm})^3} = 8{,}128\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$$

Erinnerung: der Radius einer Kugel ist $R = \dfrac{D}{2}$

das Volumen einer Kugel ist $V_K = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

(b) Man rechnet die Fallzeiten zweckmäßigerweise auf Sekundenangaben um

$\frac{t_i}{s}$	391	397	398	400	402	394	397	399	403	399

Man berechnet aus den zehn Messwerten t_i der Laufzeiten den Mittelwert $\bar{t}$ und die Standardabweichung s_{n-1}. Das Statistikprogramm Ihres Taschenrechners liefert

- den arithmetischer Mittelwert: $\bar{t} = \dfrac{\sum t_i}{10} = 398{,}0\ \mathrm{s}$
- die Standardabweichung: $s_{n-1}(t_i) = 3{,}56\ \mathrm{s}$

der mittlere Fehler des Mittelwerts ergibt sich aus der Standardabweichung zu

$$\Delta \bar{t} = \frac{s_{n-1}(t_i)}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}56\ \text{s}}{\sqrt{10}} = 1{,}13\ \text{s}$$

Aus der Beziehung für die dynamische Viskosität

$$\eta = K \cdot (\rho_k - \rho_{fl}) \cdot t$$

folgt für die Apparatekonstante

$$K = \frac{\eta}{(\rho_k - \rho_{fl}) \cdot \bar{t}}$$

aus den Versuchsergebnissen erhält man

$$K = \frac{\eta}{(\rho_k - \rho_{fl}) \cdot \bar{t}}$$

$$= \frac{1480\ \text{mPa} \cdot \text{s}}{(8{,}128 - 1{,}261)\ \text{g}\,\text{cm}^{-3} \cdot 398{,}0\ \text{s}} = \frac{1480 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-2}\ \text{m}^{-2} \cdot \text{s}}{6{,}867 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 10^{-6}\ \text{m}^{-3} \cdot 398{,}0\ \text{s}}$$

$$= 0{,}5415 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2\,\text{s}^{-2}$$

Zur Erinnerung bei der Umrechnung der Einheiten: $1\,\text{Pa} = 1\,\text{N}\text{m}^{-2} = 1\,(\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-2})\,\text{m}^{-2}$

(c) Die Beziehung für die Apparatekonstante

$$K = \frac{\eta}{(\rho_k - \rho_{fl}) \cdot \bar{t}}$$

enthält im Nenner die Differenz der Dichten von Kugel und Flüssigkeit. Berücksichtigte man Fehler in den Dichtebestimmungen, dann bliebe für die Fehlerrechnung nur der mühsame Weg über den mittleren Fehler nach Gauß – mit seinen partiellen Ableitungen – und die anschließende Berechnung des relativen Fehlers.

Werden vereinfachend die Dichten von Kugel und Flüssigkeit als fehlerfrei angenommen, dann hat man für die Apparatekonstante ein reines Potenzgesetz und man bestimmt in der Fehlerrechnung zweckmäßigerweise zuerst den **relativen Größtfehler** des Ergebnisses und daraus dann den **absoluten Größtfehler**.

$$\left|\frac{\Delta K}{K}\right| = \pm\left\{+\left|\frac{\Delta \eta}{\eta}\right| + \left|\frac{\Delta \bar{t}}{\bar{t}}\right|\right\}$$

Berechnung der relativen Fehler der einzelnen Messgrößen

- relativer Größtfehler der dynamischen Viskosität

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{10\ \text{mPa} \cdot \text{s}}{1480\ \text{mPa} \cdot \text{s}} = 6{,}76 \cdot 10^{-3}$$

- relativer Größtfehler der Kugellaufzeiten

Der relative Größtfehler des Mittelwerts wird

$$\frac{\Delta \bar{t}}{\bar{t}} = \frac{1{,}13\ \text{s}}{398{,}0\ \text{s}} = 2{,}83 \cdot 10^{-3}$$

Zusammengefasst wird damit der Betrag des relativen Größtfehlers

$$\left|\frac{\Delta K}{K}\right| = \pm\left\{\left|\frac{\Delta\eta}{\eta}\right| + \left|\frac{\Delta\bar{t}}{\bar{t}}\right|\right\}$$

$$= \pm(6{,}76 + 2{,}83)\cdot 10^{-3}$$

$$= \pm 9{,}59 \cdot 10^{-3}$$

nach oben gerundet also

$$\left|\frac{\Delta K}{K}\right| = \pm 1{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ oder } 1{,}0\ \%$$

der absolute Größtfehler ergibt sich daraus zu

$$\Delta K = \pm\left|\frac{\Delta K}{K}\right| \cdot K = \pm 9{,}59 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}542 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2}$$

$$= \pm 0{,}0052 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2}$$

nach oben gerundet also

$\Delta K = \pm 0{,}005 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2}$ (angepasst auf die drei gültigen Ziffern von K)

(d) Schlussergebnis:

Die Kalibrierung mit der Ni-Eisen-Kugel ergibt für die Apparatekonstante

$$K = (0{,}542 \pm 0{,}005)\cdot 10^{-6}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2}$$

$$K = 0{,}542 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2}\ (1 \pm 1{,}0\ \%)$$